设 $0 < x_1 < 1, x_{n+1} = \sin x_n$

证明：$\lim_{n\to\infty} \sqrt{n}\, x_n = \sqrt{3}$

证：要求 $\lim_{n\to\infty} \sqrt{n}\, x_n$，等价于求 $\lim_{n\to\infty} n\, x_n^2$，

等价于求 $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{\frac{1}{x_n^2}}$

对于数列$x_n$，唯一的稳定点只有 $0 = \sin 0$

不难得到 $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$

因此 $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{x_n^2} = \infty$

同时显然有 $\lim_{n\to\infty} n = \infty$

应用离散形式的洛必达法则

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{\frac{1}{x_n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)-n}{\frac{1}{x_{n+1}^2} - \frac{1}{x_n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\frac{1}{x_{n+1}^2} - \frac{1}{x_n^2}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}^2 x_n^2}{x_n^2 - x_{n+1}^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sin^2 x_n\, x_n^2}{x_n^2 - \sin^2 x_n}$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{\sin^2 t\ \ t^2}{t^2 - \sin^2 t}$$

此时可按照连续函数处理。

$$\lim_{t\to 0} \frac{\sin^2 t\ \ t^2}{t^2 - \sin^2 t} = \lim_{t\to 0} \frac{2t\sin^2 t + 2\sin t\cos t\ \ t^2}{2t - 2\sin t\cos t}$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{2\sin^2 t + 4t\sin t\cos t + 4t\sin t\cos t + 2t^2\cos 2t}{2 - 2\cos 2t}$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{\sin^2 t + 2t\sin 2t + t^2\cos 2t}{1 - \cos 2t}$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{2\sin t\cos t + 2\sin 2t + 4t\cos 2t + 2t\cos 2t - 2t^2\sin 2t}{2\sin 2t}$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{3\sin 2t + 6t\cos 2t - 2t^2\sin 2t}{2\sin 2t}$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{6\cos 2t + 6\cos 2t - 12t\sin 2t - 4t\sin 2t - 4t^2\cos 2t}{4\cos 2t}$$

$$= 3$$

怎么要导这么多次=_=真是活久见。果断换用泰勒。

$$\sin^2 t = \left(t - \frac{1}{6}t^3 + o(t^3)\right)^2 = t^2 - \frac{1}{3}t^4 + o(t^4)$$

$$\lim_{t\to 0}\frac{\sin^2 t\ \ t^2}{t^2-\sin^2 t}=\lim_{t\to 0}\frac{(t^2-\frac{1}{3}t^4+o(t^4))\ t^2}{t^2-\left(t^2-\frac{1}{3}t^4+o(t^4)\right)}$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{\left(1-\frac{1}{3}t^2\right)t^4+o(t^6)}{\frac{1}{3}t^4+o(t^4))}=\lim_{t\to 0}\frac{\left(1-\frac{1}{3}t^2\right)+o(t^2)}{\frac{1}{3}+o(1))}$$

$$=3$$

开根号就得到

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}\,x_n=\sqrt{3}$$

此题的核心方法是利用洛必达，设法消除 n 对极限的影响。

从而只需要研究数列中相邻项即可，而这是有递推公式可以用的。