已知 $z\in\mathbf{C}$且 $|z|\leq 1$, 求$|\sin z|$的最大值。

设 $z=x+y\mathrm{i}$， $\mathrm{x,y}\in\mathbf{R}$， $\mathrm{x}^2+\mathrm{y}^2\leq 1$
$\sin z=\sin(x+y\mathrm{i})=\sin x\cos y\mathrm{i}+\cos x\sin y\mathrm{i}$
(和角公式在复数域中也成立，证明略，
可利用复数域中三角函数的定义)
利用$\sin x=-\mathrm{i}\sinh \mathrm{i}x$, $\cos x=\cosh \mathrm{i}x$
$\sin z=\sin x\cosh y+\cos x\sinh y\ \ \mathrm{i}$
$|\sin z|^2=\sin^2 x\cosh^2 y+\cos^2 x\sinh^2 y$
$=\sin^2 x\,(1+\sinh^2 y)+\cos^2 x\sinh^2 y$
$=\sin^2 x+\sinh^2 y$

显然，只需考虑$x\geq 0, y\geq 0$的情况即可。
并注意到$\sin^2 x$, $\sinh^2 x$ 在[0,1]上递增，
因此最大值一定在$x^2+y^2=1$ 上取到。

于是$y=\sqrt{1-x^2}$
令$|\sin z|^2=\sin^2 x+\sinh^2\sqrt{1-x^2}=f(x)$
下求$f(x)$在[0,1]上最大值。

首先求导观察：
$f'(x)=\sin 2x-\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}\sinh 2\sqrt{1-x^2}$
$=\sin 2x-\dfrac{x}{2\sqrt{1-x^2}}\left(\mathrm{e}^{2\sqrt{1-x^2}}-\mathrm{e}^{-2\sqrt{1-x^2}}\right)$
又有 sin, 又有 e，还有根号，事情仿佛陷入了僵局。
接下去该怎么办呢？

我们可以对e^x作泰勒展开。

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \cdots$$
$$e^{-x} = 1 - x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{6}x^3 + \cdots$$
$$e^x - e^{-x} = 2\left(x + \frac{1}{6}x^3 + \cdots\right)$$

当 $x > 0$ 时有$e^x - e^{-x} > 2x$

故$\sin 2x - \frac{x}{2\sqrt{1-x^2}}\left(e^{2\sqrt{1-x^2}} - e^{-2\sqrt{1-x^2}}\right)$

$< \sin 2x - \frac{x}{2\sqrt{1-x^2}} \cdot 2\left(2\sqrt{1-x^2}\right)$

$= \sin 2x - 2x$

< 0

因此$f'(x) < 0, x \in [0,1]$

$f(x)$有最大值$f(0) = \sinh^2 1$

$\therefore |\sin z|$在给定条件下最大值为$\sinh 1$