已知$f(x)=\int_1^x \mathrm{e}^{t^2}\mathrm{d}t$

求$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$

解：

首先大家要知道e^{t^2}是一个典型的

没有初等原函数的函数。

所以直接积分是做不出来的。

待求式可写为

$$\int_0^1\left(\int_1^x \mathrm{e}^{t^2}\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}x$$

利用分部积分，上式

$$=\left[x\int_1^x \mathrm{e}^{t^2}\mathrm{d}t\right]_0^1-\int_0^1 x\mathrm{e}^{x^2}\mathrm{d}x$$

第一项代入 1，由定积分性质可得为 0

代入 0，由最前面的x可得也为 0

因此第一项虽然无法求出确切函数，

但是刚好能被消掉。

而此时第二项比最开始多了一个x，

就可以计算原函数。

$$\int_0^1 x\mathrm{e}^{x^2}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_0^1 \mathrm{e}^{x^2}\mathrm{d}(x^2)=\frac{1}{2}[\mathrm{e}^{x^2}]_0^1=\frac{\mathrm{e}-1}{2}$$

因此答案为$\frac{1-\mathrm{e}}{2}$

求$\int\left(\ln\ln x+\frac{1}{\ln x}\right)\mathrm{d}x$

这里直接对整个函数分部积分似乎是做不出来的。

将它分为$\int\ln\ln x\,\mathrm{d}x+\int\frac{1}{\ln x}\mathrm{d}x$

对前面一项分部积分，神奇的事情就出现了。

$$\int\ln\ln x\,\mathrm{d}x+\int\frac{1}{\ln x}\mathrm{d}x$$

$$=x\ln\ln x-\int x\frac{1}{\ln x}\frac{1}{x}\mathrm{d}x+\int\frac{1}{\ln x}\mathrm{d}x$$

$$=x\ln\ln x\ (+\mathrm{C})$$

【此段节选自《吉米多维奇数学分析习题集题解》，费定晖等】

吉米多维奇 1824，1825 题

求 $\int \frac{xe^{\arctan x}}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}\,dx$，　$\int \frac{e^{\arctan x}}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}\,dx$

解：

记 $I_1 = \int \frac{xe^{\arctan x}}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}\,dx$，　$I_2 = \int \frac{e^{\arctan x}}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}\,dx$

$$I_1 = -\int e^{\arctan x}\, d\left((1+x^2)^{-\frac{1}{2}}\right)$$

$$= -e^{\arctan x}(1+x^2)^{-\frac{1}{2}} + \int (1+x^2)^{-\frac{1}{2}} e^{\arctan x} \frac{1}{1+x^2}\,dx$$

$$= -\frac{e^{\arctan x}}{(1+x^2)^{\frac{1}{2}}} + I_2 \quad ①$$

$$I_1 = \int \frac{xe^{\arctan x}}{(1+x^2)^{\frac{1}{2}}}\,d(\arctan x) = \int \frac{x}{(1+x^2)^{\frac{1}{2}}}\,d(e^{\arctan x})$$

$$= \frac{xe^{\arctan x}}{(1+x^2)^{\frac{1}{2}}} - \int \frac{(1+x^2)^{\frac{1}{2}} - x(1+x^2)^{-\frac{1}{2}}}{1+x^2} e^{\arctan x}dx$$

$$= \frac{xe^{\arctan x}}{(1+x^2)^{\frac{1}{2}}} - \int \frac{e^{\arctan x}dx}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$= \frac{xe^{\arctan x}}{(1+x^2)^{\frac{1}{2}}} - I_2 \quad ②$$

于是 $\frac{①+②}{2} = I_1 = \frac{(x-1)e^{\arctan x}}{2(1+x^2)^{\frac{1}{2}}} + C$

$$\frac{②-①}{2} = 0 = \frac{(x+1)e^{\arctan x}}{(1+x^2)^{\frac{1}{2}}} - 2I_2$$

$$I_2 = \frac{(x+1)e^{\arctan x}}{2(1+x^2)^{\frac{1}{2}}} + C$$

遇到不好做的积分题时，特别是带变上限积分时，

多考虑分部积分，往往会有奇效。