
庄逸的数学与技术屋

依次出现的排列问题

Vortexer99

目录

1 问题	2
2 举例	2
3 研究	2
3.1 二维数组递推	2
4 一些尝试	2
5 贝尔数	3
6 贝尔数的公式和问题的解	3

1 问题

设有 N 个数, 从 $1, 2, \dots, N$ 中取值 (可重复可不用); 它们按顺序排成一列, 要求在出现 2 之前必须出现 1, 在 3 之前必须出现 2, 以此类推。试问共有多少种排列方式?

2 举例

当 $n = 3$ 时, 共有 111, 112, 121, 122, 123 五种;

当 $n = 4$ 时, 共有 1111, 1112, 1121, 1122, 1123, 1211, 1212, 1213, 1221, 1222, 1223, 1231, 1232, 1233, 1234 十五种。

3 研究

3.1 二维数组递推

在一个个排数字时, 设 $T(m, n)$ 表示已经出现的最大数字为 m , 后面还需要排 n 个数字时, 接下去排列方式的种数。考虑接下去一个数字, 它可以从 1 到 $m + 1$ 取值。如果它落在 $[1, m]$ 内, 之后就共有 $m \times T(m, n - 1)$ 种方式; 如果它等于 $m + 1$, 之后就共有 $1 \times T(m + 1, n - 1)$ 种方式。因此, 可得到方程

$$T(m, n) = mT(m, n - 1) + T(m + 1, n - 1) \quad (1)$$

另外, 画一下递推图可知只需 $T(m, 1)$ 的边界条件就能确定整个数组。由定义, 显然

$$T(m, 1) = m + 1 \quad (2)$$

最终我们得到了数组的递推关系。

$$T(m, n) = mT(m, n - 1) + T(m + 1, n - 1) \quad (3)$$

$$T(m, 1) = m + 1 \quad (4)$$

现在考虑我们的问题, 第一个数字只能为 1, 显然共有 $T(1, N - 1)$ 种排列方法。

4 一些尝试

$$T(m, 2) = mT(m, 1) + T(m + 1, 1) = m^2 + 2m + 2 \quad (5)$$

$$T(m, 3) = mT(m, 2) + T(m + 1, 2) = m^3 + 3m^2 + 6m + 5 \quad (6)$$

于是 $T(1, 1) = 2, T(1, 2) = 5, T(1, 3) = 15$, 分别对应 $n = 2, n = 3, n = 4$ 的情况。

5 贝尔数

贝尔数 B_n 为 n 元素集合划分的种类数, 它正好就是 $T(1, n - 1)$

证明:

对 a_1, \dots, a_n 的任意一种划分, 由集合元素无序性, 可将含有 a_1 的集合 S_1 排在第一位。接着在 S_1 集合中的元素外的元素中找编号最小的元素, 将其所在的集合排在第二位, 依次类推。最终将 a_k 所在的集合数列在一起即可得到从 1 到 n 的一个排列。易验证这个排列就是我们问题所需要的。如 $\{\{a_1, a_3\}, \{a_2, a_5\}, \{a_4\}\}$ 就对应 12132.

将这个过程反过来, 同样能由 1 到 n 的一个排列得到集合的一个划分, 而由排列的限制可知这个对应关系是不重的。因此这个排列的问题和贝尔数的定义是两个等价的问题。

6 贝尔数的公式和问题的解

贝尔数是对应的一组第二类斯特林数的和, 即

$$B_n = \sum_{m=0}^n \sum_{k=0}^m (-1)^k C_m^k (m-k)^n \quad (7)$$

由此公式即可算出问题的答案, 并且我们知道了 $T(1, n - 1) = B_n$, 但是关于 $T(m, n)$ 仍然不知道它的通项公式。

声明

1. 博客内容仅为经验之谈, 如认为有问题请带着批判性思维自行辨别或与我讨论, 本人不负责因盲目应用博客内容导致的任何损失。
2. 虽然文章的思想不一定是原创的, 但是写作一定是原创的, 如有雷同纯属巧合。
3. 本作品采用[知识共享署名-相同方式共享 4.0 国际许可协议](#)进行许可。



博客信息 此文章的博客来源: <https://vortexer99.github.io/>

自豪地采用 LATEX!