
庄逸的数学与技术屋

依次出现的排列问题

Vortexer99

目录

1	问题	2
2	举例	2
3	研究	2
3.1	二维数组递推	2
4	一些尝试	2
5	贝尔数	3
6	贝尔数的公式和问题的解	3

1 问题

设有 N 个数，从 $1, 2, \dots, N$ 中取值（可重复可不用）；它们按顺序排成一列，要求在出现 2 之前必须出现 1，在 3 之前必须出现 2，以此类推。试问共有多少种排列方式？

2 举例

当 $n = 3$ 时，共有 111, 112, 121, 122, 123 五种；

当 $n = 4$ 时，共有 1111, 1112, 1121, 1122, 1123, 1211, 1212, 1213, 1221, 1222, 1223, 1231, 1232, 1233, 1234 十五种。

3 研究

3.1 二维数组递推

在一个个排数字时，设 $T(m, n)$ 表示已经出现的最大数字为 m ，后面还需要排 n 个数字时，接下去排列方式的种数。考虑接下去一个数字，它可以从 1 到 $m+1$ 取值。如果它落在 $[1, m]$ 内，之后就共有 $m \times T(m, n-1)$ 种方式；如果它等于 $m+1$ ，之后就共有 $1 \times T(m+1, n-1)$ 种方式。因此，可得到方程

$$T(m, n) = mT(m, n-1) + T(m+1, n-1) \quad (1)$$

另外，画一下递推图可知只需 $T(m, 1)$ 的边界条件就能确定整个数组。由定义，显然

$$T(m, 1) = m + 1 \quad (2)$$

最终我们得到了数组的递推关系。

$$T(m, n) = mT(m, n-1) + T(m+1, n-1) \quad (3)$$

$$T(m, 1) = m + 1 \quad (4)$$

现在考虑我们的问题，第一个数字只能为 1，显然共有 $T(1, N-1)$ 种排列方法。

4 一些尝试

$$T(m, 2) = mT(m, 1) + T(m+1, 1) = m^2 + 2m + 2 \quad (5)$$

$$T(m, 3) = mT(m, 2) + T(m+1, 2) = m^3 + 3m^2 + 6m + 5 \quad (6)$$

于是 $T(1, 1) = 2, T(1, 2) = 5, T(1, 3) = 15$ ，分别对应 $n = 2, n = 3, n = 4$ 的情况。

5 贝尔数

贝尔数 B_n 为 n 元素集合划分的种类数，它正好就是 $T(1, n-1)$

证明：

对 a_1, \dots, a_n 的任意一种划分，由集合元素无序性，可将含有 a_1 的集合 S_1 排在第一位。接着在 S_1 集合中的元素外的元素中找编号最小的元素，将其所在的集合排在第二位，依次类推。最终将 a_k 所在的集合数列在一起即可得到从 1 到 n 的一个排列。易验证这个排列就是我们问题所需要的。如 $\{\{a_1, a_3\}, \{a_2, a_5\}, \{a_4\}\}$ 就对应 12132。

将这个过程反过来，同样能由 1 到 n 的一个排列得到集合的一个划分，而由排列的限制可知这个对应关系是不重的。因此这个排列的问题和贝尔数的定义是两个等价的问题。

6 贝尔数的公式和问题的解

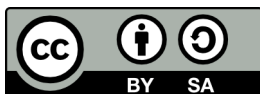
贝尔数是对应的一组第二类斯特林数的和，即

$$B_n = \sum_{m=0}^n \sum_{k=0}^m (-1)^k C_m^k (m-k)^n \quad (7)$$

由此公式即可算出问题的答案，并且我们知道了 $T(1, n-1) = B_n$ ，但是关于 $T(m, n)$ 仍然不知道它的通项公式。

声明

1. 博客内容仅为经验之谈，如认为有问题请带着批判性思维自行辨别或与我讨论，本人不负责因盲目应用博客内容导致的任何损失。
2. 虽然文章的思想不一定是原创的，但是写作一定是原创的，如有雷同纯属巧合。
3. 本作品采用[知识共享署名-相同方式共享 4.0 国际许可协议](#)进行许可。



博客信息 此文章的博客来源：<https://vortexer99.github.io/>

自豪地采用 $\text{L}^{\text{A}}\text{T}_{\text{E}}\text{X}$ ！