庄逸的数学与技术屋

一定个数事件发生的概率上界估计

Vortexer99

目录

1 一道习题

已知：

事件 $A_1, ..., A_n$ 发生的概率分别为 $p_1, ..., p_n$。记 $p = p_1 + \cdots + p_n$

求证：至少有 k 个事件发生的概率不大于 $p^k/k!$

2 想法

看到题目的第一感觉，就是类似于二项分布。但仔细考虑一下会发现困难有不少。如果严格按照题目的要求来，大致是这样的结构：

先算刚好有 k 个事件发生的概率，是一个有 C_n^k 项的求和，求和的每一项具有 $p_{i_1} \cdots p_{i_k}(1-p_{i_{k+1}}) \cdots (1-p_{i_n})$ 的形式，其中 $i_1, \ldots, i_k$ 是 1 到 n 中选出 k 个数，$i_{k+1}, \ldots i_n$ 是剩余的数。

然后要算刚好有 $k+1, \ldots, n$ 个事件发生的概率。这又是一层求和。这样一个式子，由于 $p_1, \ldots, p_n$ 都是未知的，因此几乎做不了什么化简工作。

好在此题的关键是要求的是一个不等式。因此我们再回过头来看看有什么地方可以刨去一些使得运算变得复杂的细节。

对于求和的内部，看到最后的结果是只含有 p 的表达式，而上面的式子是连乘式。想到了均值不等式，但是符号不对，得想其他办法。

再看外部的两层求和，若是能减少一层将会大大方便。这要从解题逻辑上考虑。再来看看要求：至少发生 k 个事件。那么如果就直接选出 k 个事件让它发生，剩下的就干脆不管，会怎样呢？

乍看起来好像没什么问题，但考虑一下就会发现存在重复的问题，即概率会变大。不过本来就是要做概率的放大，因此可以尝试一下。这样，放大后的式子为

$$\sum p_{i_1} \cdots p_{i_k} \tag{1}$$

3 平均的思想

想一想上式的求和过程。既然最后结果是和每个具体事件的概率无关，那么肯定是求出这个式子的最大值，然后说明最大值不大于题目给的值。可以发现，这又是一个“和为定值，求表达式最值”的分配问题。看起来很棘手，但是我们可以猜当概率 p 被平均分配的时候表达式的值是最大的。

下一个问题是，到底是被 k 个事件平均分配，还是 n 个事件平均分配？并且应该怎么证明此时是最大值？我们来推演一下。

如果是被 k 个事件平均分配，虽然这不可能（因为不可能每个事件都有 p/k 的概率），但是证明是最大值比较方便。如果 $p_{i_1} + \cdots + p_{i_k}$ 概率大小不足 p，那么肯定不是最大值，因为有增大的空间；如果等于 p，由均值不等式就可以明白平均分配时值最大。那么，这样放缩能不能证出原命题呢？

尝试一下。内部连乘式化为 p^k/k^k，是一个与求和无关的常数。因此得到的答案为 $C_n^k p^k/k^k$。和题目要求比较，要证明 $n! \le (n-k)!k^k$。代了几个具体的 k 后发现不对，说明放的太大了。

如果被 n 个事件平均分配，先看看能不能证出结论。类似地，此时得到的答案为 $C_n^k p^k/n^k$。和题目要求比，要证明 $n! \le (n-k)!n^k$。注意到 $n^k > n(n-1)\cdots(n-k+1)$，这个放缩刚刚好。

那么接下去试图证明被 n 个事件平均分配时是最大值，这个要难一些。但是这类问题，都可以考虑用调整法。

4 调整法证明最值

用调整法证明最大值，就是要说明在某个情况下，对参数进行任何满足约束的调整都会使得表达式的值变小。而各种调整又可以进行分解，即只需证明最小操作——对某两个参数进行满足约束的调整使得表达式的值变小即可。

在这里，约束是概率之和为 p。我们假设在每个事件发生的概率都为 p/n 的情况下表达式值最大，为

$$\frac{C_n^k p^k}{n^k} \tag{2}$$

接着为满足约束条件，对两个事件的概率引入小扰动，使其发生的概率分别变为 $p/n-t$ 和 $p/n+t$。此时表达式的值为

$$\frac{C_{n-2}^k p^k}{n^k} + \frac{C_{n-2}^{k-1} p^{k-1}}{n^{k-1}}(\frac{p}{n}-t) + \frac{C_{n-2}^{k-1} p^{k-1}}{n^{k-1}}(\frac{p}{n}+t) + \frac{C_{n-2}^{k-2} p^{k-2}}{n^{k-2}}(\frac{p}{n}-t)(\frac{p}{n}+t) \tag{3}$$

上式共有四项，从左至右依次是

- 从除去两个扰动事件中选 k 个;
- 从除去两个扰动事件中选 $k-1$ 个并配上概率减小的事件;
- 从除去两个扰动事件中选 $k-1$ 个并配上概率增大的事件;
- 从除去两个扰动事件中选 $k-2$ 个并配上两个概率变化的事件;

简单化简后成为

$$\frac{p^k}{n^k}(C_{n-2}^k + 2C_{n-2}^{k-1} + C_{n-2}^{k-2}) - t^2 \frac{C_{n-2}^{k-2} p^{k-2}}{n^{k-2}} \tag{4}$$

对比一下(2)，容易猜到(4)中左项应当就是最大值，而右式带平方的负项正是调整的损益。接下去只需要证明

$$C_{n-2}^k + 2C_{n-2}^{k-1} + C_{n-2}^{k-2} = C_n^k \tag{5}$$

即可。事实上，这个直接通分即可验证。

最后，对于 $n<2, k<2$ 的情况，直接单独验证即可。略（其实是懒）。

5　组合数的一个性质

从形式上看，可以猜到上式是下面这个式子的特殊情况。

$$C_n^k = \sum_{i=0}^{m} C_{n-m}^{k-i} C_m^i, m = 0, 1, \ldots, n-k \tag{6}$$

这个式子的代数证法试了一天无果，但是从实际意义上很好理解。

为从 n 个对象中选出 k 个，将其分为两堆。记 A 堆有 m 个，B 堆有 $n-m$ 个。总共的种数是以下分配的种数之和：

- 从 A 堆中取出 0 个，B 堆中取出 k 个。
- 从 A 堆中取出 1 个，B 堆中取出 $k-1$ 个。
- ....
- 从 A 堆中取出 k 个，B 堆中取出 0 个。

也就是

$$C_n^k = \sum_{i=0}^{m} C_m^i C_{n-m}^{k-i} \tag{7}$$

如果有读者知道该如何从代数角度证明，欢迎联系我。

声明

1. 博客内容仅为经验之谈，如认为有问题请带着批判性思维自行辨别或与我讨论，本人不负责因盲目应用博客内容导致的任何损失。
2. 虽然文章的思想不一定是原创的，但是写作一定是原创的，如有雷同纯属巧合。
3.

博客信息　此文章的博客来源：https://vortexer99.github.io/

自豪地采用 LaTeX！