庄逸的数学与技术屋

借期末考题论傅里叶变换的顺序对解 pde 复杂性的影响

Vortexer99

目录

1　期末考题

数学物理方法期末考试有一道题目如下。

$$u_t - 4u_{xx} - u = 0 \tag{1a}$$

$$u(x,0) = \phi(x) = \begin{cases} 0,\ x \le 0 \\ 1,\ x > 0 \end{cases} \tag{1b}$$

题目要求用傅里叶变换解。在考试解题中发现变换顺序不同导致复杂性有很大的区别。

2　换元法解

在用傅里叶变换解之前，首先先用简单的换元法解，作为参考。

和扩散方程相比，这一方程仅仅多了一项 u 的函数，可以通过类似积分因子的方法将其消去。令 $v(x,t) = u(x,t)\mathrm{e}^{-t}$，验证

$$v_t - 4v_{xx} = u_t\mathrm{e}^{-t} - u\mathrm{e}^{-t} - 4u_{xx}\mathrm{e}^{-t} = (u_t - 4u_{xx} - u)\mathrm{e}^{-t} = 0 \tag{2}$$

初始条件

$$v(x,0) = u(x,0) = \phi(x) \tag{3}$$

于是 v 满足最简单的齐次扩散方程初值问题，用 poisson 公式求解。其中 $k = 4$

$$v = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-z^2}\phi(x - \sqrt{4kt}z)\mathrm{d}z = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{x/\sqrt{4kt}} \mathrm{e}^{-z^2}\mathrm{d}z \tag{4}$$

结合误差函数，得到

$$v = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\mathrm{erf}\left(\frac{x}{\sqrt{4kt}}\right) \tag{5}$$

代回得

$$u = \frac{1}{2}\mathrm{e}^t + \frac{1}{2}\mathrm{e}^t\mathrm{erf}\left(\frac{x}{4\sqrt{t}}\right) \tag{6}$$

3　傅里叶变换解 1

然后我们来看 Fourier 变换的方法。设经过对 x 的傅里叶变换，函数 $u(x,t)$ 变为 $\hat{u}(\xi,t)$。

于是，经过傅里叶变换，方程变为

$$\hat{u}_t - 4(\mathrm{i}\xi)^2\hat{u} - \hat{u} = 0 \ \Rightarrow\ \hat{u}_t = (1 - 4\xi^2)\hat{u} \tag{7}$$

按关于 t 的常微分方程类似做法，结合 $\hat{u}(\xi,0) = \hat{\phi}(\xi)$，得到

$$\hat{u} = \hat{\phi}(\xi)\mathrm{e}^{(1-4\xi^2)t} \tag{8}$$

对其进行逆变换，得到

$$u = F^{-1}(\hat{\phi}(\xi)\mathrm{e}^{(1-4\xi^2)t}) = \mathrm{e}^t\phi(x) * F^{-1}(\mathrm{e}^{-4\xi^2 t}) \tag{9}$$

计算变换

$$F^{-1}(\mathrm{e}^{-4\xi^2 t}) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-4\xi^2 t + \mathrm{i}\xi x}\mathrm{d}\xi = \frac{1}{4\pi\sqrt{t}}\int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-\xi^2 + \frac{\mathrm{i}x}{2\sqrt{t}}\xi}\mathrm{d}\xi = \frac{1}{4\sqrt{\pi t}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{16t}} \tag{10}$$

然后计算卷积

$$\phi(x) * F^{-1}(\mathrm{e}^{-4\xi^2 t}) = \frac{1}{4\sqrt{\pi t}}\int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-\frac{(x-y)^2}{16t}}\phi(y)\mathrm{d}y \tag{11}$$

作变换 $z = (x-y)/4\sqrt{t}$，上式变为

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{\mathbb{R}} e^{-z^2}\phi(x - 4\sqrt{t}z)\mathrm{d}z = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{x/4\sqrt{t}} \mathrm{e}^{-z^2}\mathrm{d}z = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\mathrm{erf}\left(\frac{x}{4\sqrt{t}}\right) \tag{12}$$

最终得到

$$u = \frac{1}{2}\mathrm{e}^t + \frac{1}{2}\mathrm{e}^t\mathrm{erf}\left(\frac{x}{4\sqrt{t}}\right) \tag{13}$$

这是较为简单的傅里叶变换解题途径。

4　傅里叶变换解 2

但是如果先定出变换后的系数函数，再逆变换回来，事情就变得非常棘手。

从解出

$$\hat{u} = \hat{\phi}(\xi)\mathrm{e}^{(1-4\xi^2)t} \tag{14}$$

开始，先计算

$$\hat{\phi}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} \phi(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\xi}\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\xi}\mathrm{d}x = \frac{1}{-\mathrm{i}\xi}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\xi}|_0^{\infty} = \frac{1}{\mathrm{i}\xi} \tag{15}$$

在做这个积分的时候其实心里是犯嘀咕的，因为无穷代进去它并没有一个固定的值，虚指数如此积分也有待商榷。不过，可以来验证一下。这个 $\phi(x)$ 其实是 Heavyside 函数，在广义函数意义下它的导数为 δ 函数。而 δ 函数的傅里叶变换是确凿无疑的。结合 δ 函数的性质，有

$$F(\delta) = \int_{\mathbb{R}} \delta(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\xi}\mathrm{d}x = 1 \tag{16}$$

然后我们考虑傅里叶变化的导数性质。

$$F(\delta) = F(\phi') = \mathrm{i}\xi F(\phi) = 1 \tag{17}$$

于是

$$F(\phi) = \frac{1}{\mathrm{i}\xi} \tag{18}$$

验证确实如此。所以认为这变换是正确的。

接着，得到变换解为 $\hat{u} = \frac{1}{\mathrm{i}\xi}\mathrm{e}^{(1-4\xi^2)t}$，要将其逆变换回去。提出 e^t，计算式为

$$u = \frac{\mathrm{e}^t}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\mathrm{i}\xi}\mathrm{e}^{-4\xi^2 t}\mathrm{e}^{\mathrm{i}x\xi}\mathrm{d}\xi \tag{19}$$

这个式子看着实在头疼，光是 $1/\xi$ 项就很难处理。不过经过考试时孜孜不倦地研究，还是给做了出来。

首先将 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}x\xi}$ 展开成正余弦形式 $\cos x\xi + \mathrm{i}\sin x\xi$，并利用函数的奇偶性进行化简。

$1/\mathrm{i}\xi$ 为奇函数，$\mathrm{e}^{-4\xi^2 t}$ 为偶函数，因此对于偶函数 cos 项，整个函数为奇函数，在 $\mathbb{R}$ 上积分为零。于是最后只剩下

$$u = \frac{\mathrm{e}^t}{\pi}\int_0^{+\infty} \frac{1}{\xi}\mathrm{e}^{-4\xi^2 t}\sin x\xi\mathrm{d}\xi \tag{20}$$

为了消除恼人的 ξ^{-1} 项，可以对 x 求偏导，使得 $\sin x\xi$ 项抛一个 ξ 出来消去分数。

$$u_x = \frac{\mathrm{e}^t}{\pi}\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-4\xi^2 t}\cos x\xi\mathrm{d}\xi \tag{21}$$

为了简便计算这个积分，再次引入 $\mathrm{i}\sin x\xi$ 项，将其化为指数函数。最后积分完后取其实部即可。

$$u_x = \frac{\mathrm{e}^t}{\pi}\mathrm{Re}\left(\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-4\xi^2 t + \mathrm{i}\xi x}\mathrm{d}\xi\right) \tag{22}$$

对 ξ 缩放使得内部积分变为

$$\frac{1}{2\sqrt{t}}\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\xi^2 + \mathrm{i}\frac{x}{2\sqrt{t}}\xi}\mathrm{d}\xi = \frac{1}{2\sqrt{t}}\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-(\xi - \frac{\mathrm{i}x}{4\sqrt{t}})^2 - \frac{x^2}{16t}}\mathrm{d}\xi = \frac{1}{2\sqrt{t}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{16t}}\int_{-\mathrm{i}x/4\sqrt{t}}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\xi^2}\mathrm{d}\xi \tag{23}$$

最后一个积分可分为两项

$$\int_{-\mathrm{i}x/4\sqrt{t}}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\xi^2}\mathrm{d}\xi = \frac{\sqrt{\pi}}{2} + \int_{-\mathrm{i}x/4\sqrt{t}}^{0} \mathrm{e}^{-\xi^2}\mathrm{d}\xi = \frac{\sqrt{\pi}}{2} + \int_0^{\mathrm{i}x/4\sqrt{t}} \mathrm{e}^{-\xi^2}\mathrm{d}\xi \tag{24}$$

设 $z = \xi/\mathrm{i}$，则可验证最后一项为虚数。

$$\int_0^{\mathrm{i}x/4\sqrt{t}} \mathrm{e}^{-\xi^2}\mathrm{d}\xi = \int_0^{x/4\sqrt{t}} \mathrm{e}^{-(\mathrm{i}z)^2}\mathrm{i}\mathrm{d}z = \mathrm{i}\int_0^{x/4\sqrt{t}} \mathrm{e}^{-z^2}\mathrm{d}z \tag{25}$$

于是在取实部时，这一项就会消失。最后得到

$$u_x = \frac{\mathrm{e}^t}{\pi}\frac{1}{2\sqrt{t}}\mathrm{e}^{-x^2/16t}\frac{\sqrt{\pi}}{2} = \frac{\mathrm{e}^t}{4\sqrt{\pi t}}\mathrm{e}^{-x^2/16t} \tag{26}$$

对 x 积分，注意到 $1/4\sqrt{t}$ 可以用来代换。

$$u = \frac{\mathrm{e}^t}{2}\mathrm{erf}\left(\frac{x}{4\sqrt{t}}\right) + f(t) \tag{27}$$

设误差函数为 v，利用原方程和误差函数的性质

$$u_t - 4u_{xx} - u = 0 \qquad v_t - 4v_{xx} = 0 \tag{28}$$

得到

$$f(t) = f'(t) \;\Rightarrow\; f(t) = C\mathrm{e}^t \tag{29}$$

然后要通过初始条件确定 C。注意到扩散方程的 $t > 0$，将初始条件的 $t = 0$ 改为 $t \to 0^+$，则可知当 $x > 0$ 时，$x/4\sqrt{t}$ 趋向于正无穷，$v \to 1$。当 $x < 0$ 时，变量趋于负无穷，$v \to -1$。于是

$$u(x,0) = \begin{cases} -1/2 + C, & x < 0 \\ 1/2 + C, & x > 0 \end{cases} = \phi(x) \tag{30}$$

显然 $C = 1/2$，于是

$$u = \frac{1}{2}\mathrm{e}^t \mathrm{erf}\left(\frac{x}{4\sqrt{t}}\right) + \frac{1}{2}\mathrm{e}^t \tag{31}$$

可见，相比前一种傅里叶变换做法，这里先将变换函数 $\hat{u}$ 完全确定后再反变换回来非常棘手，而且还在一些地方需要做玄学的考量。

4.1 匪夷所思的事情

以下均是针对第二种傅里叶变换而言。

按照最后求解常数 C 的结果，原题的初始条件应修改为

$$u(x,0) = \phi(x) = \begin{cases} 0, \, x < 0 \\ \dfrac{1}{2}, \, x = 0 \\ 1, \, x > 0 \end{cases} \tag{32}$$

因为当 $x = 0$ 时应当有 $v = 0$。

另外，在求导消去 ξ^{-1} 时，即对式 20而言，可以用积分式代替求导，即令

$$\frac{\sin x\xi}{\xi} = \int_{-\infty}^{x} \cos\tau\xi \mathrm{d}\tau \tag{33}$$

然后通过交换积分次序进行类似的下一步操作。这样在最后可以通过积分直接得出 $\mathrm{e}^t/2$ 项而不用大费周章地去待定系数。但是，匪夷所思的事情是这里的积分下限居然是 $-\infty$ 而不是零，否则最后 $\mathrm{e}^t/2$ 这一项就会**消失**。

声明

1. 博客内容仅为经验之谈，如认为有问题请带着批判性思维自行辨别或与我讨论，本人不负责因盲目应用博客内容导致的任何损失。
2. 虽然文章的思想不一定是原创的，但是写作一定是原创的，如有雷同纯属巧合。

博客信息 此文章的博客来源：https://vortexer99.github.io/

自豪地采用 LaTeX！