庄逸的数学与技术屋

指数三角函数幂级数求和化简

Vortexer99

目录

1 内容

今天刷电动力学的时候，作者用分离变量法解出了一个位势方程，并声称解“明显”可以化简成以下形式。

$$V(x,y)=\frac{4V_0}{\pi}\sum_{i=1,3,\dots}^{\infty}\frac{1}{n}\mathrm{e}^{-n\pi x/a}\sin\left(\frac{n\pi y}{a}\right)=\frac{2V_0}{\pi}\arctan\left(\frac{\sin\pi y/a}{\sinh\pi x/a}\right)\tag{1}$$

然而作为一名辣鸡读者，看着一点都不显然。于是推了一下。

先试了对后面的 arctan 进行展开，结果出来 sin 和 sinh 的幂次，没法处理，卒。

但是仍然可以从 arctan 的展开式入手，众所周知（其实我也是百度查的）

$$\arctan x=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\dots\tag{2}$$

和左端进行对比，发现已经有了 $1/n$。然后试着凑幂次。指数部分可以拎出一个 n 来作幂次，但是三角函数不行。然而想到可以利用复变函数把三角函数化成指数，并且形式类似也可拎出一个 n 来。这样，幂指数也解决了。

此时还差一个符号。在展开式中各项是正负交替的，原式则是全正。有没有什么办法把展开式中的负号全变正呢？代 $-x$ 试试，发现没用，因为都是奇次。注意到符号的周期其实是指数增长的 4 倍，不难想到可以代 ix 凑。这次刚好——

$$\arctan ix=i\left(x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\frac{x^7}{7}+\dots\right)\tag{3}$$

最后只需要将多出来的 i 除掉即可。于是可以开始按照展开式把它收回去。注意，一开始最好直接用共轭消除法将 sin 化为指数，而不要加一项 cos 最后取虚部或实部。否则就会万分艰难，卡在 $\mathrm{Re}(\arctan(sth))$ 上。（论我为啥推了一个下午还没推出来）

$$\begin{aligned}
V(x,y)&=\frac{4V_0}{\pi}\sum_{i=1,3,\dots}^{\infty}\frac{1}{n}\mathrm{e}^{-n\pi x/a}\sin\left(\frac{n\pi y}{a}\right) &(4)\\
&=\frac{4V_0}{\pi}\frac{1}{2i}\left(\sum_{i=1,3,\dots}^{\infty}\frac{1}{n}\mathrm{e}^{-n\pi x/a}\mathrm{e}^{n\pi iy/a}-\sum_{i=1,3,\dots}^{\infty}\frac{1}{n}\mathrm{e}^{-n\pi x/a}\mathrm{e}^{-n\pi iy/a}\right) &(5)\\
&=-\frac{2iV_0}{\pi}\left(\sum_{i=1,3,\dots}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\mathrm{e}^{\frac{\pi}{a}(iy-x)}\right)^n-\sum_{i=1,3,\dots}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\mathrm{e}^{\frac{\pi}{a}(-iy-x)}\right)^n\right) &(6)\\
&=-\frac{2V_0}{\pi}\left(\arctan\left(i\mathrm{e}^{\frac{\pi}{a}(iy-x)}\right)-\arctan\left(i\mathrm{e}^{\frac{\pi}{a}(-iy-x)}\right)\right) &(7)
\end{aligned}$$

此时可利用公式合并。这个其实就是和角公式的应用，可以手动推一下。

$$\begin{aligned}
\arctan a-\arctan b&=\arctan(\tan(\arctan a-\arctan b)) &(8)\\
&=\arctan\left(\frac{a-b}{1+ab}\right) &(9)
\end{aligned}$$

于是得到

$$
\begin{aligned}
V(x,y) &= -\frac{2V_0}{\pi}\arctan\left(i\frac{\mathrm{e}^{\frac{\pi}{a}(iy-x)}-\mathrm{e}^{\frac{\pi}{a}(-iy-x)}}{1-\mathrm{e}^{\frac{\pi}{a}(iy-x)}\mathrm{e}^{\frac{\pi}{a}(-iy-x)}}\right) && (10)\\
&= \frac{2V_0}{\pi}\arctan\left(\frac{\mathrm{e}^{-\pi x/a}}{i}\frac{\mathrm{e}^{\frac{\pi}{a}iy}-\mathrm{e}^{-\frac{\pi}{a}iy}}{1-\mathrm{e}^{\frac{\pi}{a}(-2x)}}\right) && (11)\\
&= \frac{2V_0}{\pi}\arctan\left(\frac{1}{i}\frac{\mathrm{e}^{\frac{\pi}{a}iy}-\mathrm{e}^{-\frac{\pi}{a}iy}}{\mathrm{e}^{\frac{\pi}{a}x}-\mathrm{e}^{-\frac{\pi}{a}x}}\right) && (12)\\
&= \frac{2V_0}{\pi}\arctan\left(\frac{\sin\pi y/a}{\sinh\pi x/a}\right) && (13)
\end{aligned}
$$

现在看看还是挺显然的嘿嘿嘿。不过我们能学到什么呢？

一是用分离变量法解出题目，得到级数解后，可以尝试着将其化简，利用其中的系数、指数特征，和已有的函数展开式进行对比，以获得可能的线索。二是现有的展开式和得到的级数解有一些细微差别时，可以代诸如 $-x$，ix 来尝试消除差异。三是将三角函数化为指数函数时，最好使用共轭消去法，避免引入 Re,Im 函数造成推导困难。

感谢某孙学长 2333

声明

1. 博客内容仅为经验之谈，如认为有问题请带着批判性思维自行辨别或与我讨论，本人不负责因盲目应用博客内容导致的任何损失。
2. 虽然文章的思想不一定是原创的，但是写作一定是原创的，如有雷同纯属巧合。
3.

博客信息 此文章的博客来源：https://vortexer99.github.io/

自豪地采用 LaTeX！