庄逸的数学与技术屋

nabla 算子运算规则的作用对象修正

Vortexer99

目录

1 背景和动机：不能总作为向量的算符

众所周知，nabla 算子 ∇ 的运算规则，可以把它当做向量，套用向量的运算规则，即令

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial}{\partial z}\boldsymbol{k} \tag{1}$$

对于标量场 ϕ 的梯度，向量场 $\boldsymbol{A}$ 的散度、旋度，甚至旋度的散度一些复合，用向量的运算规则都能 fit very well. 例如：

$$\operatorname{div}\operatorname{curl}\boldsymbol{A} = \nabla\cdot(\nabla\times A) = \nabla\cdot\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} = 0 \tag{2}$$

但是，在一些情况下，简单套用矢量运算法会产生一些问题。本篇文章的目的即为解决以下两个问题

1. 什么时候 nabla 算符不能套用矢量运算法？
2. 当不能套用矢量运算法的时候，我们该如何做？

2 关键点 A：无简单交换律

先提一个简单的。

众所周知，向量点积是可交换的，即 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}$。但是，nabla 算符的点积是不可交换的，其表达的意义不同。例如：

$$\nabla\cdot\boldsymbol{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \tag{3}$$

而

$$\boldsymbol{v}\cdot\nabla = v_x\frac{\partial}{\partial x} + v_y\frac{\partial}{\partial y} + v_z\frac{\partial}{\partial z} \tag{4}$$

这并不是一个确切的数值，而仍然是一个算符。考虑其对 $\boldsymbol{u}$ 进行作用，取其结果的 x 分量为例

$$((\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{u})_x = v_x\frac{\partial u_x}{\partial x} + v_y\frac{\partial u_x}{\partial y} + v_z\frac{\partial u_x}{\partial z} \tag{5}$$

作为对比，有

$$((\nabla\cdot\boldsymbol{v})\boldsymbol{u})_x = u_x\frac{\partial v_x}{\partial x} + u_x\frac{\partial v_y}{\partial y} + u_x\frac{\partial v_z}{\partial z} \tag{6}$$

同理，梯度也是不可交换的，即 $\nabla\phi$ 和 $\phi\nabla$ 不同，但是遇到的不多，迷惑性也不如点积的大。旋度即使用向量反交换律法则也不成立，即 $\nabla\times\boldsymbol{v}$ 和 $-\boldsymbol{v}\times\nabla$ 不同。从性质上来说，nabla 置于前的式子，都是一个具体的向量或数，而 nabla 置于后的式子，都还只是一个算符，不能将 nabla 之前的向量或标量**直接放入偏导数内**。

在解决问题 B 之后，可以很直观地理解这里的关键原因，并重建良好的交换律。见原理解释 A：重建交换律

3 问题 B 引入：隐藏的错误

下面这个表达式是正确的。

$$(\nabla \times \boldsymbol{v}) \times \boldsymbol{v} = -\frac{1}{2}\nabla(\boldsymbol{v}^2) + (\boldsymbol{v} \cdot \nabla)\boldsymbol{v} \tag{7}$$

请试着用公式

$$\boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) = \boldsymbol{b}(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c}) - \boldsymbol{c}(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}) \tag{8}$$

对左端展开以验证。

你将很有可能得到：

$$\begin{align} (\nabla \times \boldsymbol{v}) \times \boldsymbol{v} &= -\boldsymbol{v} \times (\nabla \times \boldsymbol{v}) \tag{9} \\ &= -\nabla(\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{v}) + \boldsymbol{v}(\boldsymbol{v} \cdot \nabla) \tag{10} \\ &= -\nabla(\boldsymbol{v}^2) + (\boldsymbol{v} \cdot \nabla)\boldsymbol{v} \tag{11} \end{align}$$

你可能会经历以下心路历程。

1. 发现得到的结果，和前面所谓正确的公式差了一半。
2. 于是你开始检查你的推导过程。
3. 很有可能你在很多地方见过式 8[1]，因此不会怀疑它的正确性。
4. 在对照了十几遍之后，仍然找不出推导过程半点不对劲的地方。
5. 你开始对我给你所谓的正确方程产生严重的怀疑。

请相信我。我给你的方程是完全正确的，而你的推导过程确实存在问题。这确实非常隐蔽，可能看个几十遍都看不出来。于是你打算直接拿行列式进行一通爆算来找问题到底出在哪儿。但是为了极大地节约你的时间，我还是直接告诉你结论。

4 关键点 B：作用对象

nabla 算符有固定作用对象

nabla 算符有固定作用对象

nabla 算符有固定作用对象

意思是，在 $\nabla \times \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{v}$ 中，nabla 算符只对一个向量 $\boldsymbol{v}$ 产生作用。而在 $\nabla(\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{v})$ 中，nabla 算符相当于对两个向量都进行了一次作用。因此，要注意区分。

[1] 此式由于其类似"bac(k)-cab" 而得名 "后面的出租车"，是使用非常频繁的三重矢积公式。

5 解决办法 B：费曼脚标和默认约定

引入“费曼脚标算符”[2]，以指示 **nabla 算符的作用对象**。例如

$$\nabla(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})=\nabla_a(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})+\nabla_b(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}) \tag{12}$$

等号左边的 nabla 算符表示对两个向量都进行作用，右边的第一项表示只对 $\boldsymbol{a}$ 向量作用，把 $\boldsymbol{b}$ 视为常数（常向量）。第二项则相反。其原理类似于乘法求导法则。

$$\frac{\partial}{\partial x}(ab)=b\frac{\partial a}{\partial x}+a\frac{\partial b}{\partial x} \tag{13}$$

然后我们再来进行运算。在最开始的式子中，nabla 后接哪个向量，下标就标上哪个向量。即**默认约定：**nabla 算符作用对象就是其后的向量或标量。为了清晰起见，先用 $\boldsymbol{v}_1=\boldsymbol{v}_2=\boldsymbol{v}$ 区分。(其实不区分也行，只需要牢记有下标时只对其中一个 $\boldsymbol{v}$ 进行运算即可。)

$$\begin{aligned}
(\nabla\times\boldsymbol{v}_1)\times\boldsymbol{v}_2 &= -\boldsymbol{v}_2\times(\nabla_1\times\boldsymbol{v}_1) && (14)\\
&= -\nabla_1(\boldsymbol{v}_2\cdot\boldsymbol{v}_1)+\boldsymbol{v}_1(\boldsymbol{v}_2\cdot\nabla_1) && (15)\\
(\because \boldsymbol{v}_1=\boldsymbol{v}_2)\qquad &= -\frac{1}{2}\left(\nabla_1(\boldsymbol{v}_2\cdot\boldsymbol{v}_1)+\nabla_2(\boldsymbol{v}_2\cdot\boldsymbol{v}_1)\right)+\boldsymbol{v}_1(\boldsymbol{v}_2\cdot\nabla_1) && (16)\\
&= -\frac{1}{2}\nabla(\boldsymbol{v}_1\cdot\boldsymbol{v}_2)+(\boldsymbol{v}_2\cdot\nabla_1)\boldsymbol{v}_1 && (17)\\
&= -\frac{1}{2}\nabla(\boldsymbol{v}^2)+(\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{v} && (18)
\end{aligned}$$

可以看到，这次的式子是正确的。其中最后一步第二项的处理，注意到 $\boldsymbol{v}_2\cdot\nabla_1$ 去掉脚标后（只要不瞎用交换律，见关键点 A：无简单交换律）也不会产生“算符作用到前面一个向量上”的歧义即可。

6 原理解释 A：重建交换律

现在可以解释关键点 A：无简单交换律中内在的原因。根据**默认约定：**nabla 算符作用的对象就是其后跟着的向量或标量，即

$$\nabla\phi=\nabla_\phi\phi \qquad \nabla\cdot\boldsymbol{v}=\nabla_{\boldsymbol{v}}\cdot\boldsymbol{v} \qquad \nabla\times\boldsymbol{v}=\nabla_{\boldsymbol{v}}\times\boldsymbol{v} \tag{19}$$

但是将 nabla 算符后置时，其后的作用对象可能暂时还未给出。例如

$$\boldsymbol{v}\cdot\nabla=\boldsymbol{v}\cdot\nabla_? \tag{20}$$

因此，考虑任意向量 $\boldsymbol{u}$，我们有

$$(\nabla\cdot\boldsymbol{v})\boldsymbol{u}=(\nabla_{\boldsymbol{v}}\cdot\boldsymbol{v})\boldsymbol{u} \qquad (\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{u}=(\boldsymbol{v}\cdot\nabla_{\boldsymbol{u}})\boldsymbol{u} \tag{21}$$

[2] 可在《费曼物理学讲义》第二卷 §27-3 中找到

在用下标指定作用对象后，利用向量的运算规则（梯度、散度交换律，旋度反交换律）理论上是被允许的，因为它们表达的意义很明确，即作用对象之外的向量或标量都被**明确禁止进入偏导数内**。

$$\nabla_{\boldsymbol{v}} \cdot \boldsymbol{v} = \boldsymbol{v} \cdot \nabla_{\boldsymbol{v}} \qquad \nabla_{\boldsymbol{u}} \cdot \boldsymbol{v} = \boldsymbol{v} \cdot \nabla_{\boldsymbol{u}} \tag{22}$$

显然，对 $\boldsymbol{u} \neq \boldsymbol{v}$，由于 $\nabla_{\boldsymbol{v}} \neq \nabla_{\boldsymbol{u}}$，可知 $\nabla_{\boldsymbol{v}} \cdot \boldsymbol{v} \neq \nabla_{\boldsymbol{u}} \cdot \boldsymbol{v}$ $(\boldsymbol{v} \neq \boldsymbol{0})$，于是显然有 $\nabla_{\boldsymbol{v}} \cdot \boldsymbol{v} \neq \boldsymbol{v} \cdot \nabla_{\boldsymbol{u}}$。这就是为什么一般默认记法 $\nabla \cdot \boldsymbol{v} \neq \boldsymbol{v} \cdot \nabla$。

特殊的情况，考虑“左右旋度”，虽然 nabla 算符置于不同的位置，但是可以理解成已经显式指明作用的对象（就是你要求旋度的那个矢量，偏导数都是对它求），就可以套用反交换律了。

$$\nabla_{\boldsymbol{v}} \times \boldsymbol{v} = -\boldsymbol{v} \times \nabla_{\boldsymbol{v}} \tag{23}$$

7 注意点：向量规则和默认约定

在上面的运算过程中，考虑 $(\boldsymbol{v}_2 \cdot \nabla_1)\boldsymbol{v}_1$ 一项。既然 ∇_1 对 $\boldsymbol{v}_2$ 是完全不理睬的，那么**似乎**能把 $\boldsymbol{v}_2$ 独立出来，然后 nabla 算符和后面的 $\boldsymbol{v}_1$ 粘上，即

$$(\boldsymbol{v}_2 \cdot \nabla_1)\boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{v}_2(\nabla_1 \cdot \boldsymbol{v}_1) = (\nabla \cdot \boldsymbol{v})\boldsymbol{v} \tag{24}$$

而正确的项为 $(\boldsymbol{v} \cdot \nabla)\boldsymbol{v}$。如果不注意区分，会误解为是因为交换律而引起的问题，但事实上就算强行交换，意义也不对。

进行区分，正确的答案为 $(\boldsymbol{v}_2 \cdot \nabla_1)\boldsymbol{v}_1$，上面最后一项为 $(\nabla_1 \cdot \boldsymbol{v}_1)\boldsymbol{v}_2$。注意默认约定，

$$(\nabla_1 \cdot \boldsymbol{v}_1)\boldsymbol{v}_2 = (\boldsymbol{v}_1 \cdot \nabla_1)\boldsymbol{v}_2 \neq (\boldsymbol{v}_1 \cdot \nabla)\boldsymbol{v}_2 = (\boldsymbol{v}_1 \cdot \nabla_2)\boldsymbol{v}_2 \tag{25}$$

在 $\boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{v}_2$ 的条件下，上式最右端轮换指标可以化为正确答案。两端根本的不同之处在于 ∇ 的作用对象，一个是在括号外，一个是在括号内。这使得即使 $\boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{v}_2 = \boldsymbol{v}$ 也无济于事。

根源是第一步就出了错。其实，写成普通向量形式是好理解的，即一般

$$\boldsymbol{a}(\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{c}) \neq (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b})\boldsymbol{c} \tag{26}$$

即使指明了作用对象，nabla 的运算相对“自由”了一些，但仍然不能为所欲为，由于指出了 nabla 算符和向量的不同之处，就发明不符合向量基本运算规则的 nabla 运算规则，强行去粘作用对象。脚标和作用对象的引入，目标是**使得将 nabla 算符能够适用向量运算的规则，而不是让 nabla 算符超越现有的规则**。

8 一劳永逸的解决方案：张量与求和约定

以后不学张量的非数学物理力学系同学其实大概可以跳过此段。

8.1 爱因斯坦求和约定

首先引入爱因斯坦求和约定：凡是成对出现的指标，都认为是要从 1 到 3 进行求和。于是向量可以表为

$$\boldsymbol{a}=a_1\boldsymbol{e}_1+a_2\boldsymbol{e}_2+a_3\boldsymbol{e}_3=\sum_{i=1}^{3}a_i\boldsymbol{e}_i=a_i\boldsymbol{e}_i \tag{27}$$

8.2 两个符号

再引入 kronecker 和 levi-civita 符号

$$\delta_{ij}=\begin{cases}1 & i=j\\ 0 & i\neq j\end{cases}\qquad \varepsilon_{ijk}=\begin{cases}1 & ijk=123,231,312\\ -1 & ijk=132,213,321\\ 0 & other\end{cases} \tag{28}$$

它们分别具有以下性质

$$f(i,j)\delta_{i,j}=f(i,i) \tag{29}$$

证明：

$$left=\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}f(i,j)\delta_{i,j}=\sum_{\substack{i,j=1\\ i=j}}^{3}f(i,j)\delta_{i,j}+\sum_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{3}f(i,j)\delta_{i,j} \tag{30}$$

$$(\text{use definition})\quad =\sum_{\substack{i,j=1\\ i=j}}^{3}f(i,j)=\sum_{i=1}^{3}f(i,i)=right \tag{31}$$

以及

$$\varepsilon_{ijk}=\varepsilon_{kij}=\varepsilon_{jki}=-\varepsilon_{ikj}=-\varepsilon_{kji}=-\varepsilon_{jik} \tag{32}$$

证明：只需要理解 ε_{ijk} 只返回 ijk 的排列性质（偶排列为 1，奇排列为-1）即可，因此交换奇数次下标会改变符号，交换偶数次下标不改变符号。

8.3 基矢运算

定义基矢的点乘和叉乘分别为

$$\boldsymbol{e}_i\cdot\boldsymbol{e}_j=\delta_{ij}\qquad \boldsymbol{e}_i\times\boldsymbol{e}_j=\varepsilon_{ijk}\boldsymbol{e}_k \tag{33}$$

于是我们就有了向量的点乘和叉乘

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=(a_i\boldsymbol{e}_i)\cdot(b_j\boldsymbol{e}_j)=a_ib_j(\boldsymbol{e}_i\cdot\boldsymbol{e}_j)=a_ib_j\delta_{ij}=a_ib_i \tag{34}$$

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=(a_i\boldsymbol{e}_i)\times(b_j\boldsymbol{e}_j)=a_ib_j(\boldsymbol{e}_i\times\boldsymbol{e}_j)=a_ib_j\varepsilon_{ijk}\boldsymbol{e}_k \tag{35}$$

其中叉乘的 $\boldsymbol{e}_1$ 方向分量为 $a_ib_j\varepsilon_{ij1}=a_2b_3-a_3b_2$，和行列式传统定义计算结果相同。

另外还有基矢的并矢计算，得到的是一个只在 i 行 j 列为 1 的矩阵。

$$A_{ij}\boldsymbol{e}_i\otimes\boldsymbol{e}_j=\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}A_{ij}\boldsymbol{e}_i\otimes\boldsymbol{e}_j=\boldsymbol{A} \tag{36}$$

其他高级的张量计算等在此不作介绍。

8.4 nabla 算子及运算

现在，只要把 x,y,z 三个方向记为 x_1,x_2,x_3 三个方向，令 nabla 算子为

$$\nabla=\frac{\partial}{\partial x_i}\boldsymbol{e}_i \tag{37}$$

即可像正常向量一样参与运算。例如

$$\nabla\cdot\boldsymbol{v}=\frac{\partial}{\partial x_i}\boldsymbol{e}_i\cdot v_j\boldsymbol{e}_j=\frac{\partial v_i}{\partial x_i}\qquad\nabla\times\boldsymbol{v}=\frac{\partial}{\partial x_i}\boldsymbol{e}_i\times v_j\boldsymbol{e}_j=\frac{\partial v_j}{\partial x_i}\varepsilon_{ijk}\boldsymbol{e}_k \tag{38}$$

此时也需要注意作用对象。作用对象和非作用对象的区别，在此很明显地体现为在偏导数中是视为常数直接提出，还是需要参与偏导运算。

$$\boldsymbol{v}\times\nabla=v_i\boldsymbol{e}_i\times\frac{\partial}{\partial x_j}\boldsymbol{e}_j=\varepsilon_{ijk}v_i\frac{\partial}{\partial x_j}\boldsymbol{e}_k \tag{39}$$

$$\nabla(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})=\frac{\partial(a_jb_j)}{\partial x_i}\boldsymbol{e}_i=\left(a_j\frac{\partial b_j}{\partial x_i}+b_j\frac{\partial a_j}{\partial x_i}\right)\boldsymbol{e}_i \tag{40}$$

$$\nabla_a(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})=\frac{\partial_a(a_jb_j)}{\partial x_i}\boldsymbol{e}_i=b_j\frac{\partial a_j}{\partial x_i}\boldsymbol{e}_i \tag{41}$$

可见，写在 nabla 算符之前的向量，其写成这种形式时也位于偏导左边，因此一般粘在偏导左边作为系数。而写在算符之后的向量，位于偏导右边，而粘在偏导右边的量一般就被认为是需要进行偏导运算。这也许就是默认约定的来源。

8.5 对前面问题的解释

现在再计算前面产生问题的式子，就不会产生问题。

$$(\nabla\times\boldsymbol{v})\times\boldsymbol{v}=\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\boldsymbol{e}_i\times v_j\boldsymbol{e}_j\right)\times\boldsymbol{v} \tag{42}$$

$$=\frac{\partial v_j}{\partial x_i}\varepsilon_{ijk}\boldsymbol{e}_k\times v_l\boldsymbol{e}_l \tag{43}$$

$$=v_l\frac{\partial v_j}{\partial x_i}\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{klm}\boldsymbol{e}_m \tag{44}$$

$$=v_l\frac{\partial v_j}{\partial x_i}\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{lmk}\boldsymbol{e}_m \tag{45}$$

然后我们来考察一下两个 Levi-civita 符号的乘积。注意到它们下标 ijk 和 lmk 中，在相同的位置出现了 k。那么，要使得它们都不为零，i,j 和 l,m 都分别只能在除 k 外的两个数中选。于是，要么 $i=l,j=m$，要么 $i=m,j=l$。

$$f(i,j,k,l,m)\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{lmk}=f(i,j,k,i,j)\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ijk}+f(i,j,k,j,i)\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{jik} \tag{46}$$

交换最后一个符号的 ij 下标，由于 $\varepsilon_{jik} = -\varepsilon_{ijk}$，增加一个负号。

$$f(i,j,k,l,m)\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{lmk} = (f(i,j,k,i,j) - f(i,j,k,j,i))\varepsilon_{ijk}^2 \tag{47}$$

由于出现了平方，ε_{ijk}^2 在三个下标都互不相等的情况下总为 1，即有

$$\varepsilon_{ijk}^2 = (1-\delta_{ij})(1-\delta_{jk})(1-\delta_{ki}) \tag{48}$$

考虑 δ_{ij} 项，

$$(f(i,j,k,i,j) - f(i,j,k,j,i))\delta_{ij} = f(i,i,k,i,i) - f(i,i,k,i,i) = 0 \tag{49}$$

于是这一项可以去掉。

$$f(i,j,k,l,m)\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{lmk} = (f(i,j,k,i,j) - f(i,j,k,j,i))(1-\delta_{jk})(1-\delta_{ki}) \tag{50}$$

要使得表达式不为零，必须要 $i,j \neq k$。之前已经证明 $i = j$ 的情况会得到无用的零，因此此处可以认为 $i \neq j$。如果前面的函数不含 k，即可以用四元函数 g 表示 f，$f(i,j,k,l,m) = g(i,j,l,m)$，那么每次求和，$k$ 就可以不受影响地选且只能选 i,j 之外的那一个值，使得表达式不为零。也就是

$$g(i,j,l,m)\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{lmk} = g(i,j,i,j) - g(i,j,j,i) \tag{51}$$

回到最开始的计算，我们有

$$(\nabla \times \boldsymbol{v}) \times \boldsymbol{v} = v_l \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{lmk} \boldsymbol{e}_m \tag{52}$$

此处两个 k 位置对齐，且没有在别的地方出现，因此有

$$\begin{aligned}
(\nabla \times \boldsymbol{v}) \times \boldsymbol{v} &= v_i \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \boldsymbol{e}_j - v_j \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \boldsymbol{e}_i &(53)\\
&= v_i \frac{\partial}{\partial x_i} v_j e_j - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_i} e_i (v_j \cdot v_j) &(54)\\
&= (\boldsymbol{v} \cdot \nabla)\boldsymbol{v} - \frac{1}{2} \nabla \boldsymbol{v}^2 &(55)
\end{aligned}$$

按照爱因斯坦求和约定进行推算，一路都很顺利，没有遇到什么坎（两个 ε 乘积那个理解了就很容易）。

9 总结：when&how

回到开头提出的两个问题。

什么时候 nabla 算符不能简单套用向量运算规则？ 对于一个**完整的表达式**（$\boldsymbol{v} \cdot \nabla$ 等不算，它们只能作为一个算符），如果牵扯到了**两个及以上**的向量（相同的也算），并且使

用了一些矢量运算公式，使得 nabla 算符 **从括号内移至括号外**（不指明作用对象的话，受到 nabla 算符作用的向量数量可能增加，如

$$\boldsymbol{a} \cdot (\nabla \times \boldsymbol{b}) = \nabla_b \cdot (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{a}) \neq \nabla \cdot (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{a}) \tag{56}$$

从括号外移至括号内，则此时简单套用向量运算规则会导致**作用对象发生转移**，因此不能简单套用。

显然，如果式子中只有一个向量的话，无论怎么变，作用对象都是明确的。有多个向量，甚至是相同向量时，具有较大迷惑性，需要小心。

应该怎么办？ 只需要记住 nabla 算符有**作用对象**即可。可以通过加费曼脚标以标明，然后可依照向量运算规则。对于表达式中有向量相同的情况，先用不同符号代替区分，最后再将它们都代回原来的符号。

当然，也可以直接采用张量和爱因斯坦求和约定，直接按照运算顺序一步步来，但也需要注意作用对象。

博客信息 此文章的博客来源：`https://vortexer99.github.io/`

自豪地采用 LaTeX！