# 庄逸的数学与技术屋

## 数学手册中旋度的纠错和方法

Vortexer99

## 目录

# 1 提问

一个很简单的问题。请在以下两个选项中选出正确的一项。

对于一般矢量场 $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})$ 和标量场 $\phi(x,y,z)$ 而言，

A

$$\nabla\times(\phi\boldsymbol{u})=(\nabla\phi)\times\boldsymbol{u}+\phi(\nabla\times\boldsymbol{u}) \tag{1}$$

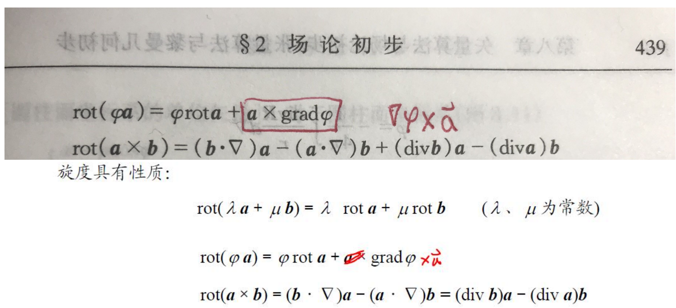
B

$$\nabla\times(\phi\boldsymbol{u})=\boldsymbol{u}\times(\nabla\phi)+\phi(\nabla\times\boldsymbol{u}) \tag{2}$$

# 2 纠错

正确答案是 A，但是数学手册上写的是 B。

小声吐槽：难以想象我就跟着数学手册错了一年多。



§2 场论初步 439

$\mathrm{rot}(\varphi\boldsymbol{a})=\varphi\,\mathrm{rot}\,\boldsymbol{a}+\boxed{\boldsymbol{a}\times\mathrm{grad}\,\varphi}$ $\nabla\varphi\times\vec{a}$

$\mathrm{rot}(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})=(\boldsymbol{b}\cdot\nabla)\boldsymbol{a}-(\boldsymbol{a}\cdot\nabla)\boldsymbol{b}+(\mathrm{div}\,\boldsymbol{b})\boldsymbol{a}-(\mathrm{div}\,\boldsymbol{a})\boldsymbol{b}$

旋度具有性质:

$\mathrm{rot}(\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b})=\lambda\,\mathrm{rot}\,\boldsymbol{a}+\mu\,\mathrm{rot}\,\boldsymbol{b}$ （$\lambda$、$\mu$ 为常数）

$\mathrm{rot}(\varphi\boldsymbol{a})=\varphi\,\mathrm{rot}\,\boldsymbol{a}+\cancel{\boldsymbol{a}\times}\,\mathrm{grad}\,\varphi\times\vec{a}$

$\mathrm{rot}(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})=(\boldsymbol{b}\cdot\nabla)\boldsymbol{a}-(\boldsymbol{a}\cdot\nabla)\boldsymbol{b}=(\mathrm{div}\,\boldsymbol{b})\boldsymbol{a}-(\mathrm{div}\,\boldsymbol{a})\boldsymbol{b}$

图 1: 《数学手册》中的一个错误

于是去年在写数学分析期末复习的时候，搬运公式也错了。现在已经把原错误纠正。

# 3 方法

## 3.1 Critical thinking

就算有解决问题的能力，首先也要发现问题。拿到公式后可以和已有的知识、别的书对比一下，也可以自己算一遍，把公式的来龙去脉弄明白那是最好。等到应用公式发现和答案对不上，则很难会怀疑到公式本身上去。因此最好保证拿到的公式都是正确的。

另一方面，使用这些已有的结论会加快速度，但是需要承担一定的记错公式或公式本身就不对的风险。如果采用更为基本的原理，从基本定义开始推导，则虽然慢但正确性能获得一定保障。

### 3.2 行列式算法

对于一般同学可以直接用定义验证。

$$\nabla \times (\phi \boldsymbol{u}) = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ \phi u_x & \phi u_y & \phi u_z \end{vmatrix} \tag{3}$$

只需要考虑 $\boldsymbol{i}$ 方向的分量，其他类似。

$$\nabla \times (\phi \boldsymbol{u}) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ \phi u_y & \phi u_z \end{vmatrix} \boldsymbol{i} + \dots \tag{4}$$

二阶行列式的值为

$$= \frac{\partial(\phi u_z)}{\partial y} - \frac{\partial(\phi u_y)}{\partial z} = \frac{\partial \phi}{\partial y} u_z + \frac{\partial u_z}{\partial y}\phi - \frac{\partial \phi}{\partial z} u_y - \frac{\partial u_y}{\partial z}\phi \tag{5}$$

$$= \left(\frac{\partial u_z}{\partial y}\phi - \frac{\partial u_y}{\partial z}\phi\right) + \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} u_z - \frac{\partial \phi}{\partial z} u_y\right) \tag{6}$$

$$= \phi \begin{vmatrix} \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ u_y & u_z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \dfrac{\partial \phi}{\partial y} & \dfrac{\partial \phi}{\partial z} \\ u_y & u_z \end{vmatrix} \tag{7}$$

这两项正分别是 $\phi(\nabla \times \boldsymbol{u})$ 和 $(\nabla\phi) \times \boldsymbol{u}$ 的 $i$ 分量。写出相应的三阶行列式即可简单验证。

### 3.3 求和约定算法

通过引入 Levi-Civita 符号 $\varepsilon_{ijk}$，当 $ijk$ 是 123 的偶置换是取 1，奇置换时取 0，$i, j, k$ 有任意两个相等时取 0，可方便地计算旋度。（$x_i = x, y, z$，当 $i = 1, 2, 3$）

$$\nabla \times (\phi \boldsymbol{u}) = \frac{\partial}{\partial x_i} \boldsymbol{e}_i \times (\phi u_j \boldsymbol{e}_j) \tag{8}$$

$$= \frac{\partial(\phi u_j)}{\partial x_i} \boldsymbol{e}_k \varepsilon_{ijk} \tag{9}$$

$$= \left(\frac{\partial \phi}{\partial x_i} u_j + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\phi\right) \varepsilon_{ijk} \boldsymbol{e}_k \tag{10}$$

$$= \frac{\partial \phi}{\partial x_i} u_j \varepsilon_{ijk} \boldsymbol{e}_k + \phi \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \varepsilon_{ijk} \boldsymbol{e}_k \tag{11}$$

$$= \left(\frac{\partial \phi}{\partial x_i} \boldsymbol{e}_i\right) \times u_j \boldsymbol{e}_j + \phi \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \boldsymbol{e}_i\right) \times u_j \boldsymbol{e}_j \tag{12}$$

$$= (\nabla \phi) \times \boldsymbol{u} + \phi(\nabla \times \boldsymbol{u}) \tag{13}$$

和矢量叉乘 $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = a_i b_j \varepsilon_{ijk} \boldsymbol{e}_k$ 进行比较，立即得到上面的第一项为 $(\nabla\phi) \times \boldsymbol{u}$。

**声明**

1. 博客内容仅为经验之谈，如认为有问题请带着批判性思维自行辨别或与我讨论，本人不负责因盲目应用博客内容导致的任何损失。
2. 虽然文章的思想不一定是原创的，但是写作一定是原创的，如有雷同纯属巧合。



**博客信息** 此文章的博客来源：https://vortexer99.github.io/

自豪地采用 LaTeX！