
庄逸的数学与技术屋

固定两端最小面积的旋转曲面

Vortexer99

目录

| | | |
|---|----|---|
| 1 | 问题 | 2 |
| 2 | 解 | 2 |

1 问题

设绕 x 轴旋转的曲线，在 xy 平面内由函数 $y = f(x)$ 和两端点 $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ 决定 ($x_1 < x_2, \forall x \in (x_1, x_2) f(x) > 0$)，则旋转而成的曲面面积为

$$S = \int_{x_1}^{x_2} 2\pi y \, ds = 2\pi \int_{x_1}^{x_2} f(x) \sqrt{f'^2(x) + 1} \, dx \quad (1)$$

我们要求曲面面积的最小值。这是一个比较简单的泛函问题。

2 解

由于两端点固定，所以可由 Euler-lagrange 方程求得曲面面积的最小值。令泛函

$$F := \int_{x_1}^{x_2} f(x) \sqrt{f'^2(x) + 1} \, dx \quad (2)$$

对 EL 方程

$$\frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial f'} - \frac{\partial F}{\partial f} = 0 \quad (3)$$

先作一些变换，以节省计算量（这是一个较为常用的技巧）。由于

$$\frac{dF}{dx} = \frac{\partial F}{\partial f} f' + \frac{\partial F}{\partial f'} \frac{df'}{dx} + \frac{\partial F}{\partial x} \quad (4)$$

由于 F 不显含 x ，故最后一项为零。对中间一项，把对 x 全导数提到最外面，即分部积分

$$\frac{dF}{dx} = \frac{\partial F}{\partial f} f' + \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial f'} f' \right) - f' \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial f'} \quad (5)$$

注意到首尾两项即是 EL 方程。把中间一项移到左边合并导数，得到

$$\frac{d}{dx} \left(F - f' \frac{\partial F}{\partial f'} \right) = f' \left(\frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial f'} - \frac{\partial F}{\partial f} \right) = 0 \quad (6)$$

那么显然有

$$f' \frac{\partial F}{\partial f'} - F = c \quad (7)$$

其中 c 是常数。于是

$$f (f'^2 (f'^2 + 1)^{-1/2} - (f'^2 + 1)^{1/2}) = c \quad (8)$$

化简得到

$$f^2 = c^2 (f'^2 + 1) \quad (9)$$

设 $f(x) = c \cosh u(x)$, $f' = c \sinh u(x) \cdot u'(x)$, 得

$$\cosh^2 u = c^2 \sinh^2 u \cdot u'^2 + 1 \quad (10)$$

利用 $\cosh^2 u = \sinh^2 u + 1$, $f > 0, \cosh x > 0 \Rightarrow u > 0 \Rightarrow \sinh u > 0$, 化简得

$$u'c = \pm 1 \Rightarrow u = \pm \frac{x}{c} + c_2 = \pm c_1 x + c_2 \quad (c_1 = 1/c) \quad (11)$$

由于 $\cosh x$ 是偶函数, $\cosh(\pm c_1 x + c_2) = \cosh(c_1 x \pm c_2)$, 又因为 c_2 是任意常数, 可以直接用正号代替正负号。于是结果为

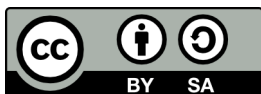
$$f = \frac{1}{c_1} \cosh(c_1 x + c_2) \quad (c_1 > 0) \quad (12)$$

注意到其中决定形状的只有双曲余弦函数, 自由常数 c_1 表征 xy 坐标等比例缩放对解无影响, c_2 表征左右平移坐标对解无影响。考虑到形成最小面积的曲线形状不依赖于坐标架选取的客观性, 以及固定的两点限制条件可以解出两常数, 这是合情合理的。

由于这曲线由双曲余弦函数决定, 因此又称这条曲线为悬链线, 其名称来源于将一根绳子两端悬挂固定, 受重力自然下垂所形成的形状。

声明

1. 博客内容仅为经验之谈, 如认为有问题请带着批判性思维自行辨别或与我讨论, 本人不负责因盲目应用博客内容导致的任何损失。
2. 虽然文章的思想不一定是原创的, 但是写作一定是原创的, 如有雷同纯属巧合。
3. 本作品采用[知识共享署名-相同方式共享 4.0 国际许可协议](#)进行许可。



博客信息 此文章的博客来源: <https://vortexer99.github.io/>

自豪地采用 L^AT_EX!