庄逸的数学与技术屋

固定两端最小面积的旋转曲面

Vortexer99

目录

1 问题

设绕 x 轴旋转的曲线，在 xy 平面内由函数 $y = f(x)$ 和两端点 $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ 决定 $(x_1 < x_2,\ \forall x \in (x_1, x_2) f(x) > 0)$，则旋转而成的曲面面积为

$$S = \int_{x_1}^{x_2} 2\pi y \, \mathrm{d}s = 2\pi \int_{x_1}^{x_2} f(x)\sqrt{f'^2(x)+1} \, \mathrm{d}x \tag{1}$$

我们要求曲面面积的最小值。这是一个比较简单的泛函问题。

2 解

由于两端点固定，所以可由 Euler-lagrange 方程求得曲面面积的最小值。令泛函

$$F := f(x)\sqrt{f'^2(x)+1} \tag{2}$$

对 EL 方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{\partial F}{\partial f'} - \frac{\partial F}{\partial f} = 0 \tag{3}$$

先作一些变换，以节省计算量（这是一个较为常用的技巧）。由于

$$\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}x} = \frac{\partial F}{\partial f} f' + \frac{\partial F}{\partial f'}\frac{\mathrm{d}f'}{\mathrm{d}x} + \frac{\partial F}{\partial x} \tag{4}$$

由于 F 不显含 x，故最后一项为零。对中间一项，把对 x 全导数提到最外面，即分部积分

$$\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}x} = \frac{\partial F}{\partial f} f' + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial F}{\partial f'} f'\right) - f'\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{\partial F}{\partial f'} \tag{5}$$

注意到首尾两项即是 EL 方程。把中间一项移到左边合并导数，得到

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(F - f'\frac{\partial F}{\partial f'}\right) = f'\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{\partial F}{\partial f'} - \frac{\partial F}{\partial f}\right) = 0 \tag{6}$$

那么显然有

$$f'\frac{\partial F}{\partial f'} - F = c \tag{7}$$

其中 c 是常数。于是

$$f\left(f'^2(f'^2+1)^{-1/2} - (f'^2+1)^{1/2}\right) = c \tag{8}$$

化简得到

$$f^2 = c^2(f'^2+1) \tag{9}$$

设 $f(x) = c\cosh u(x),\ f' = c\sinh u(x)\cdot u'(x)$，得

$$\cosh^2 u = c^2\sinh^2 u \cdot u'^2 + 1 \tag{10}$$

利用 $\cosh^2 u = \sinh^2 u + 1$，$f > 0, \cosh x > 0 \ \Rightarrow\ u > 0 \ \Rightarrow\ \sinh u > 0$，化简得

$$u'c = \pm 1 \quad \Rightarrow \quad u = \pm\frac{x}{c} + c_2 = \pm c_1 x + c_2 \quad (c_1 = 1/c) \tag{11}$$

由于 $\cosh x$ 是偶函数，$\cosh(\pm c_1 x + c_2) = \cosh(c_1 x \pm c_2)$，又因为 c_2 是任意常数，可以直接用正号代替正负号。于是结果为

$$f = \frac{1}{c_1}\cosh(c_1 x + c_2) \qquad (c_1 > 0) \tag{12}$$

注意到其中决定形状的只有双曲余弦函数，自由常数 c_1 表征 xy 坐标等比例缩放对解无影响，c_2 表征左右平移坐标对解无影响。考虑到形成最小面积的曲线形状不依赖于坐标架选取的客观性，以及固定的两点限制条件可以解出两常数，这是合情合理的。

由于这曲线由双曲余弦函数决定，因此又称这条曲线为悬链线，其名称来源于将一根绳子两端悬挂固定，受重力自然下垂所形成的形状。

声明

博客信息 此文章的博客来源：`https://vortexer99.github.io/`

自豪地采用 LaTeX！