庄逸的数学与技术屋

旧文重发 • 满群同态证明技巧

Vortexer99

目录

1 命题 **2**

2 直接定义证明满射 **2**

3 利用生成元和同态性质间接证明满射 **2**

4 结论 **3**

1 命题

自然同态 $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_p$ 诱导的群同态 $\mathrm{SL}_n(\mathbb{Z}) \to \mathrm{SL}_n(\mathbb{Z}_p)$ 是满同态，其中 p 是素数。

2 直接定义证明满射

同态是易证的，这里的关键是要证明 $\phi : \mathrm{SL}_n(\mathbb{Z}) \to \mathrm{SL}_n(\mathbb{Z}_p)$ 是满射。

容易想到的一种方法是：对每个 $\mathrm{SL}_n(\mathbb{Z}_p)$ 中的矩阵，都有 $\mathrm{SL}_n(\mathbb{Z})$ 中的一个矩阵与之对应。

也就是，对于 $\mathrm{SL}_n(\mathbb{Z}_p)$ 中的矩阵 $A_p = (\overline{a_{ij}})$(其中 $0 \le a_{ij} < p$)，要找一个系数矩阵 $N = (n_{ij})(n_{ij} \in \mathbb{Z})$，得到对应矩阵 $A = (a_{ij}) + p \cdot N$ 利用已知的 $\det(\overline{a_{ij}}) = \overline{1}$ 的条件 (即 $\det(a_{ij}) = x \cdot p + 1$($x$ 为某确定整数但并不知道)) 使得 $\det A = 1$。

举个二维情况的例子：对 $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}_p)$ 中的某矩阵 $\begin{pmatrix} \overline{a} & \overline{b} \\ \overline{c} & \overline{d} \end{pmatrix}$ 已知 $\overline{a}\overline{d} - \overline{b}\overline{c} = \overline{1}$，即 $ad - bc \equiv 1(\mathrm{mod}\ p)$ 要找四个整数 $n_1\ n_2\ n_3\ n_4$ 让 $\det \begin{pmatrix} a + n_1 p & b + n_2 p \\ c + n_3 p & d + n_4 p \end{pmatrix} = 1$。这显然是十分头大的。

3 利用生成元和同态性质间接证明满射

所以有另一种想法。我们只要证明群 $\mathrm{SL}_n(\mathbb{Z}_p)$ 有生成元，并且这些生成元有对应的矩阵即可。这样我们就不用考虑全部元素。只需考虑几个生成元是否有对应的矩阵，其他 $\mathrm{SL}_n(\mathbb{Z}_p)$ 中的矩阵都可以根据群同态的性质推出存在对应的矩阵。什么样的生成元呢？很容易想到可爱的初等矩阵。并且，我们发现

1. $\mathrm{SL}_n(\mathbb{Z}_p)$ 中单位矩阵 $\begin{pmatrix} \overline{1} & & & \\ & \overline{1} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \overline{1} \end{pmatrix}$ 对应的矩阵 $\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$ 在 $\mathrm{SL}_n(\mathbb{Z})$ 中；

2. $\mathrm{SL}_n(\mathbb{Z}_p)$ 中倍加矩阵
$$\begin{pmatrix} \overline{1} & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & \overline{1} & \dots & \overline{a} & & \\ & & & \ddots & \vdots & & \\ & & & & \overline{1} & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & \overline{1} \end{pmatrix}$$ 对应的矩阵 $$\begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & \dots & a & & \\ & & & \ddots & \vdots & & \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix}$$ 在 $\mathrm{SL}_n(\mathbb{Z})$

中；

3. $\mathrm{SL}_n(\mathbb{Z}_p)$ 中交换矩阵 (稍有些不同，为了使行列式值为 1 必须加个负号)
$$\begin{pmatrix} \overline{1} & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & \overline{0} & \dots & \overline{1} & & \\ & & \vdots & \ddots & \vdots & & \\ & & \overline{-1} & \dots & \overline{0} & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & \overline{1} \end{pmatrix} \text{对应的矩阵} \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 0 & \dots & 1 & & \\ & & \vdots & \ddots & \vdots & & \\ & & -1 & \dots & 0 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix}$$
也在 $\mathrm{SL}_n(\mathbb{Z})$ 中

OK，then，对于 $\mathrm{SL}_n(\mathbb{Z}_p)$ 中任意矩阵 $(\overline{a_{ij}})$，因为它行列式等于 1 所以可逆，从而可以被分解而写成 $\mathrm{SL}_n(\mathbb{Z}_p)$ 中单位矩阵和像上面这样的初等矩阵的乘积。

注意，少了一个提出倍数的初等矩阵也没有关系，可以通过倍加解决。考虑如下情况：

如果 $(\overline{a_{ij}})$ 最后化到了 $\begin{pmatrix} \overline{x_{11}} & & & \\ & \overline{x_{22}} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \overline{x_{nn}} \end{pmatrix}$ 的形式,考虑左上 2×2 矩阵 $\begin{pmatrix} \overline{x_{11}} & \overline{0} \\ \overline{0} & \overline{x_{22}} \end{pmatrix}$,注意到 $\mathbb{Z}_p$ 中每个元素均有逆,将第二行的 $(x_{22})^{-1}$ 倍加到第一行,得到 $\begin{pmatrix} \overline{x_{11}} & \overline{1} \\ \overline{0} & \overline{x_{22}} \end{pmatrix}$;把第二列的 $1-\overline{x_{11}}$ 倍加到第一列,得到 $\begin{pmatrix} \overline{1} & \overline{1} \\ (\overline{1}-\overline{x_{11}})\overline{x_{22}} & \overline{x_{22}} \end{pmatrix}$。用左上角的 1 消去副对角线,得到 $\begin{pmatrix} \overline{1} & \overline{1} \\ \overline{0} & \overline{x_{11}}\,\overline{x_{22}} \end{pmatrix}$ 重复操作,可把 $\begin{pmatrix} \overline{x_{11}} & & & \\ & \overline{x_{22}} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \overline{x_{nn}} \end{pmatrix}$ 变为 $\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \overline{x_{11}}\,\overline{x_{22}}\dots\overline{x_{nn}} \end{pmatrix}$ 注意到由条件得到连乘积为 $\overline{1}$，则它就是单位矩阵。

4 结论

我们证明了群 $\mathrm{SL}_n(\mathbb{Z}_p)$ 有生成元，也说明了生成元都有原像。那么既然 $\mathrm{SL}_n(\mathbb{Z}_p)$ 中每个矩阵都能通过生成元运算得到，每个矩阵也都就利用同态，通过生成元的原像得到。于是就成功证明了满射。

后记

整理自大胡子的习题课
感谢 zx 的人工 ocr

声明

1. 博客内容仅为经验之谈，如认为有问题请带着批判性思维自行辨别或与我讨论，本人不负责因盲目应用博客内容导致的任何损失。
2. 虽然文章的思想不一定是原创的，但是写作一定是原创的，如有雷同纯属巧合。

博客信息　此文章的博客来源：`https://vortexer99.github.io/`

自豪地采用 LaTeX！