庄逸的数学与技术屋

旧文重发 • 一号数学研究：用阶乘线性表示幂

Vortexer99

目录

1 一号数学研究之一: 另一种范德蒙

最近经常碰到如下的行列式：

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ k_1 & k_2 & \dots & k_n \\ k_1(k_1-1) & k_2(k_2-1) & \dots & k_n(k_n-1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k_1\dots(k_1-n+2) & k_2\dots(k_2-n+2) & \dots & k_n(k_n-n+2) \end{vmatrix}$$

应该如何计算呢？试着把第二行加到第三行, 第三行变为

$$k_1^2, k_2^2, k_3^2, \dots, k_n^2 \tag{1}$$

猜想和范德蒙行列式有关系。考虑第四行，只看第一列：$k_1(k_1-1)(k_1-2)$。加上第三行, 可以把最后的 k_1-2 加成 k_1 得到 $k_1^2(k_1-1)$。再由之前的结论（加上“加上第二行的第三行即 式 1”），可以得到 k_1^3。于是可以推得该行列式等于下面的行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ k_1 & k_2 & \dots & k_n \\ k_1^2 & k_2^2 & \dots & k_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k_1^{n-1} & k_2^{n-1} & \dots & k_n^{n-1} \end{vmatrix} \tag{2}$$

这就是范德蒙行列式, 值为

$$\prod_{1\le i<j\le n}(k_j-k_i) \tag{3}$$

2 一号数学研究之二：一道关于递归方程的习题

2.1 题目

考虑递归方程

$$u(n+k) = a_0u(n+1) + \dots + a_{k-1}u(n+k-1) \tag{4}$$

置 $f(x) = x^k - a_{k-1}x^{k-1} - \dots - a_0$。

证明：函数 $u(n) = n^rc^n, r \ge 0, c \ne 0$ 是递归方程的解当且仅当 c 是 $f(x)$ 的根, 其重数不小于 $r+1$。

2.2 解

改写条件为

$$u(n+k) = \sum_{t=0}^{k-1} a_tu(n+t) \tag{5}$$

设 $P: u(n) = n^r c^n, r \geq 0, c \neq 0$ 是递归方程的解，则

$$P \Leftrightarrow (n+k)^r c^{n+k} = \sum_{t=0}^{k-1} a_t (n+t)^r c^{n+t} \tag{6}$$

$$\Leftrightarrow \sum_{m=0}^{r} C_r^m n^{r-m} k^m c^{n+k} = \sum_{t=0}^{k-1} a_t \sum_{m=0}^{r} C_r^m n^{r-m} t^m c^{n+t} \tag{7}$$

右边

$$= \sum_{m=0}^{r} C_r^m n^{r-m} \sum_{t=0}^{k-1} t^m a_t c^{n+t} \tag{8}$$

由 n 的任意性, 对应次数系数应相等。

$$\therefore P \Leftrightarrow k^r c^{n+k} = \sum_{t=0}^{k-1} t^m a_t^{n+t}, \qquad m = 0, 1, \ldots, r \tag{9}$$

$$\Leftrightarrow k^m c^k = \sum_{t=0}^{k-1} a_t t^m c^t, \qquad m = 0, 1, \ldots, r \tag{10}$$

另一方面，

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow x^k = \sum_{t=0}^{k-1} a_t x^t \tag{11}$$

$$f^{(m)}(x) = 0 \Leftrightarrow \left(\prod_{q=0}^{m-1} (k-q) \right) x^{k-m} = \sum_{t=0}^{k-1} a_t \left(\prod_{q=0}^{m-1} (t-q) \right) x^{t-m} \tag{12}$$

设 $Q: c$ 是 $f(x)$ 的根, 其重数不小于 $r+1$

$$Q \Leftrightarrow f^{(m)}(c) = 0, m = 0, 1, \ldots, r \tag{13}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} c^k = \sum_{t=0}^{k-1} a_t c^t, & m = 0 \\ \left(\prod_{q=0}^{m-1} (k-q) \right) c^k = \sum_{t=0}^{k-1} a_t \left(\prod_{q=0}^{m-1} (t-q) \right) c^t, & m = 1, 2, \ldots, r \end{cases} \tag{14}$$

注意到 $m = 0$ 时已经成立 $P \Leftrightarrow Q$

$$c^k = \sum_{t=0}^{k-1} a_t c^t \Leftrightarrow k^m c^k = \sum_{t=0}^{k-1} a_t t^m c^t, \qquad m = 0 \tag{15}$$

下面考虑对每一个 $m = 1, 2, \ldots, r$ 证明 $P \Leftrightarrow Q$，即

$$\prod_{q=0}^{m-1} (k-q)\, c^k = \sum_{t=0}^{k-1} a_t \left(\prod_{q=0}^{m-1} (t-q) \right) c^t \Leftrightarrow k^m c^k = \sum_{t=0}^{k-1} a_t t^m c^t \tag{16}$$

观察几项。当 $m = 1$ 时, 需证

$$k c^k = \sum_{t=0}^{k-1} a_t t c^t \Leftrightarrow k c^k = \sum_{t=0}^{k-1} a_t t c^t \tag{17}$$

显然成立。当 $m=2$ 时, 需证

$$k(k-1)c^k=\sum_{t=0}^{k-1}a_tt(t-1)c^t \Leftrightarrow k^2c^k=\sum_{t=0}^{k-1}a_tt^2c^t \tag{18}$$

注意到之前已经有

$$kc^k=\sum_{t=0}^{k-1}a_ttc^t \tag{19}$$

将其加到两边即得到

$$k^2c^k=\sum_{t=0}^{k-1}a_tt^2c^t \tag{20}$$

显然，情况和方法都与section 1类似，于是可以认为对于每个 m 都成立 $P \Leftrightarrow Q$。

3　一号数学研究之三：向外探求

上回提到, 要证明

$$\prod_{q=0}^{m-1}(k-q)\,c^k=\sum_{t=0}^{k-1}a_t\left(\prod_{q=0}^{m-1}(t-q)\right)c^t \Leftrightarrow k^mc^k=\sum_{t=0}^{k-1}a_tt^mc^t \tag{21}$$

对 $m=1,2,\ldots,r$ 成立。通过观察, 当 $m=2$ 时, 需证

$$k(k-1)c^k=\sum_{t=0}^{k-1}a_tt(t-1)c^t \Leftrightarrow k^2c^k=\sum_{t=0}^{k-1}a_tt^2c^t \tag{22}$$

当 $m=3$ 时, 需证

$$k(k-1)(k-2)c^k=\sum_{t=0}^{k-1}a_tt(t-1)(t-2)c^t \Leftrightarrow k^3c^k=\sum_{t=0}^{k-1}a_tt^3c^t \tag{23}$$

并且由 $k^2=k(k-1)+k, k^3=k(k-1)(k-2)+2k(k-1)+k^2$，可以合理推知 k^m 是 $k,k(k-1),\ldots,k(k-1)\ldots k(k-m+1)$ 的线性组合，即

$$k^m=\sum_{s=0}^{m-1}x_{m,s}\prod_{q=0}^{s}(k-q) \tag{24}$$

下面我们来在原命题中构造出上式的形式来精确证明。

$$\left(\prod_{q=0}^{m-1}(k-q)\right)c^k=\sum_{t=0}^{k-1}a_t\left(\prod_{q=0}^{m-1}(t-q)\right)c^t,\qquad m=1,2,\ldots,r \tag{25}$$

$$\Leftrightarrow\quad c^k\left(\prod_{q=0}^{s}(k-q)\right)=\sum_{t=0}^{k-1}c^ta_t\left(\prod_{q=0}^{s}(t-q)\right),\qquad s=0,1,\ldots,r-1 \tag{26}$$

两边乘上 $x_{m,s}$ 并从 $s=0$ 到 $m-1$ 求和，其中 $1\le m\le r$，得

$$\sum_{s=0}^{m-1} x_{m,s}c^k\left(\prod_{q=0}^{s}(k-q)\right)=\sum_{s=0}^{m-1} x_{m,s}\sum_{t=0}^{k-1}c^t a_t\left(\prod_{q=0}^{s}(t-q)\right) \tag{27}$$

$$\Leftrightarrow\quad c^k\sum_{s=0}^{m-1} x_{m,s}\left(\prod_{q=0}^{s}(k-q)\right)=\sum_{t=0}^{k-1}a_t c^t\sum_{s=0}^{m-1} x_{m,s}\left(\prod_{q=0}^{s}(t-q)\right) \tag{28}$$

$$\Leftrightarrow\quad c^k k^m=\sum_{t=0}^{k-1}a_t c^t t^m \tag{29}$$

这正是所要证得等价关系的右端。

到这里这个证明就结束了，但是还有一个问题值得研究：能不能求出系数 x_s?? 观察前几个式子：

$$k^1=k \tag{30}$$

$$k^2=k(k-1)+k \tag{31}$$

$$k^3=k(k-1)(k-2)+2k(k-1)+k^2 \tag{32}$$

$$=k(k-1)(k-2)+3k(k-1)+k \tag{33}$$

$$k^4=k(k-1)(k-2)(k-3)+3k(k-1)(k-2)+2k^2(k-1)+k^3 \tag{34}$$

$$=k(k-1)(k-2)(k-3)+3k(k-1)(k-2)+2k(k-1)^2+2k(k-1)+k \tag{35}$$

出现了 $k(k-1)^2$ 怎么办? 只需要 $k-1$ 替代 k 代入第二个式子即可。

$$(k-1)^2=(k-1)(k-2)+(k-1) \tag{36}$$

于是

$$k^4=(k-1)(k-2)(k-3)+3k(k-1)(k-2)+2k(k-1)(k-2)+4k(k-1)+k \tag{37}$$

从系数上看没有什么特别有用的规律，再往后算也比较困难。不过在推导的过程中由红字部分不难推测出

$$k^m=\prod_{t=0}^{m-1}(k-t)+\sum_{r=2}^{m-1}rk^{m-r}\prod_{t=1}^{r-1}(k-t)+k^{m-1}\quad(m\ge 3) \tag{38}$$

可惜的是这并没有什么卵用, 因为代入之前所设表达式得到

$$k^m=\sum_{s=0}^{m-1}x_{m,s}\prod_{q=0}^{s}(k-q) \tag{39}$$

$$=\prod_{t=0}^{m-1}(k-t)+\sum_{r=2}^{m-1}r\left(\sum_{s=0}^{m-r-1}x_{m-r,s}\prod_{q=0}^{s}(k-q)\right)\prod_{t=1}^{r-1}(k-t)+\sum_{s=0}^{m-2}x_{m-1,s}\prod_{q=0}^{s}(k-q) \tag{40}$$

这太可怕了，看起来没法子处理。那么，接下去怎么办呢?

4 一号数学研究之四：得出系数

上回提到, 在求系数时遇到了前所未有的困难。现在怎么办呢? 继续算下去看看呗。不过我不打算下手算了。这种事情当然是要交给电脑来做。得到如下的系数矩阵：横向为 s，纵向为 m

$$\begin{array}{cccccccccc}
1 \\
1 & 1 \\
1 & 3 & 1 \\
1 & 7 & 6 & 1 \\
1 & 15 & 25 & 10 & 1 \\
1 & 31 & 90 & 65 & 15 & 1 \\
1 & 63 & 301 & 350 & 140 & 21 & 1 \\
1 & 127 & 966 & 1701 & 1050 & 266 & 28 & 1 \\
1 & 255 & 3025 & 7770 & 6951 & 2646 & 462 & 36 & 1 \\
1 & 511 & 9330 & 34105 & 42525 & 22827 & 5880 & 750 & 45 & 1
\end{array} \tag{41}$$

眼尖的同学也许已经发现了。注意这一部分：

$$\begin{array}{ccc}
31 & 90 & 65 \\
63 & 301 & 350 \\
127 & 966 & 1701
\end{array} \tag{42}$$

这几个 1 反复出现, 其中一定有联系。

$$31 + 90 \times 3 = 301 \qquad 301 + 350 \times 4 = 1701 \tag{43}$$

用别的数字实验发现这个规律也对。因此有递推公式 $x_{m+1,s} = sx_{m,s} + x_{m,s-1}$ 加上初始条件有 $x_{m,1} = 1, x_{m,m} = 1$ 理论上可以确定整个矩阵。
但是这里我们不讨论这个递推公式怎么解。

经过学长点拨, 去找了第二类斯特林数的资料。

The triangle Stirling numbers of the Second kind is

$$\begin{array}{cccccc}
1 \\
1 & 1 \\
1 & 3 & 1 \\
1 & 7 & 6 & 1 \\
1 & 15 & 25 & 10 & 1 \\
1 & 31 & 90 & 65 & 15 & 1
\end{array} \tag{44}$$

http //mathworld.wolfram.com/StirlingNumberoftheSecondKind.html

一模一样！往下翻就有通项公式

$$= \frac{1}{s!} \sum_{k=0}^{s} (-1)^k C_s^k (s-k)^m \tag{45}$$

5 一号数学研究之五：研究通项

然后我们来研究一下这个通项公式先验证它满足递推式：

$$x_{m,1}=\sum_{k=0}^{1}(-1)^kC_1^k(1-k)^m=1 \tag{46}$$

$$x_{m,m}=\frac{1}{m!}\sum_{k=0}^{m}(-1)^kC_m^k(m-k)^m \tag{47}$$

诶, 好像不能直接得到等于 1。但是这时我们往往能得到一些新东西。将其展开, 得到

$$\sum_{k=0}^{m}C_m^k(-1)^k\sum_{t=0}^{m}C_m^tm^{m-t}(-1)^tk^t=m! \tag{48}$$

$$\sum_{k=0}^{m}\sum_{t=0}^{m}C_m^tC_m^tm^{m-t}(-1)^{k+t}k^t=m! \tag{49}$$

这个等式是如何成立的仍旧是个谜。

先验证 $x_{m+1,s}=sx_{m,s}+x_{m,s-1}$

$$\text{右边}=\frac{s}{s!}\sum_{k=0}^{s}(-1)^kC_s^k(s-k)^m+\frac{1}{(s-1)!}\sum_{k=0}^{s-1}(-1)^kC_{s-1}^k(s-1-k)^m \tag{50}$$

$$=\frac{1}{(s-1)!}\sum_{k=0}^{s}(-1)^kC_s^k(s-k)^m+\frac{1}{(s-1)!}\sum_{k=1}^{s}(-1)^{k-1}C_{s-1}^{k-1}(s-k)^m \tag{51}$$

$$=\frac{s^m}{(s-1)!}+\frac{1}{(s-1)!}\sum_{k=1}^{s}((-1)^k(s-k)^m)\left(C_s^k-C_{s-1}^{k-1}\right) \tag{52}$$

$$=\frac{1}{(s-1)!}\sum_{k=0}^{s}(-1)^kC_{s-1}^k(s-k)^m \tag{53}$$

$$=\frac{1}{(s-1)!}\sum_{k=0}^{s}(-1)^kC_s^k\cdot\frac{s-k}{s}(s-k)^m \tag{54}$$

$$=\frac{1}{s!}\sum_{k=0}^{s}(-1)^kC_s^k(s-k)^{m+1}=x_{m,s} \tag{55}$$

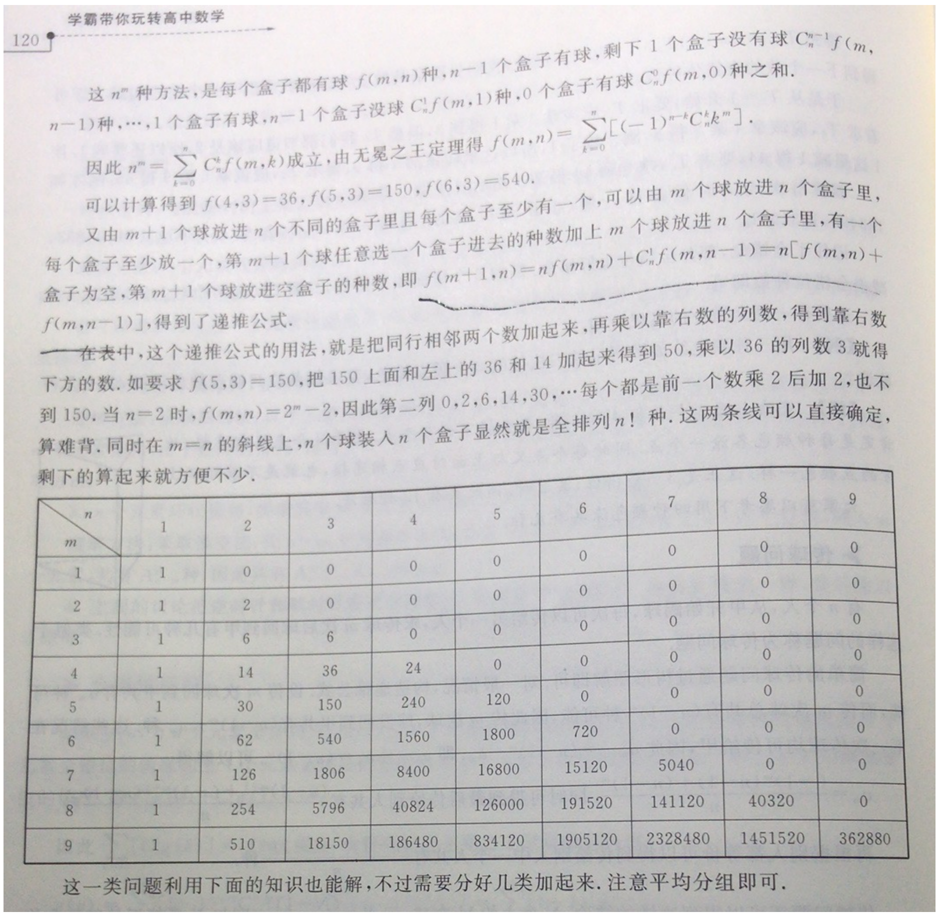
$$\tag{56}$$

这个递推公式和通项公式有些眼熟，翻了下书发现很久以前其实研究过这东西。对比一下表，发现只是相差了列数的阶乘而已。

最后我们回到之前的问题，把 n 次方分解成阶乘的和。

$$n^m=\sum_{s=0}^{m-1}x_{m,s}\prod_{q=0}^{s}(n-q)=\sum_{s=0}^{m-1}\left(\frac{1}{s!}\sum_{k=0}^{s}(-1)^kC_s^k(s-k)^m\right)\prod_{q=0}^{s}(n-q) \tag{57}$$

其中括号内的系数就是第二类斯特林数。



这 n^m 种方法，是每个盒子都有球 $f(m,n)$ 种，$n-1$ 个盒子有球，剩下 1 个盒子没有球 $C_n^{n-1}f(m,n-1)$ 种，…，1 个盒子有球，$n-1$ 个盒子没球 $C_n^1 f(m,1)$ 种，0 个盒子有球 $C_n^0 f(m,0)$ 种之和.

因此 $n^m=\sum\limits_{k=0}^{n}C_n^k f(m,k)$ 成立，由无冕之王定理得 $f(m,n)=\sum\limits_{k=0}^{n}[(-1)^{n-k}C_n^k k^m]$.

可以计算得到 $f(4,3)=36$，$f(5,3)=150$，$f(6,3)=540$.

又由 $m+1$ 个球放进 n 个不同的盒子里且每个盒子至少有一个，可以由 m 个球放进 n 个盒子里，每个盒子至少放一个，第 $m+1$ 个球任意选一个盒子进去的种数加上 m 个球放进 n 个盒子里，有一个盒子为空，第 $m+1$ 个球放进空盒子的种数，即 $f(m+1,n)=nf(m,n)+C_n^1 f(m,n-1)=n[f(m,n)+f(m,n-1)]$，得到了递推公式.

在表中，这个递推公式的用法，就是把同行相邻两个数加起来，再乘以靠右数的列数，得到靠右数下方的数. 如要求 $f(5,3)=150$，把 150 上面和左上的 36 和 14 加起来得到 50，乘以 36 的列数 3 就得到 150. 当 $n=2$ 时，$f(m,n)=2^m-2$，因此第二列 0，2，6，14，30，…每个都是前一个数乘 2 后加 2，也不算难背. 同时在 $m=n$ 的斜线上，n 个球装入 n 个盒子显然就是全排列 $n!$ 种. 这两条线可以直接确定，剩下的算起来就方便不少.

m \ n	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	1	0	0	0	0	0	0	0	0
2	1	2	0	0	0	0	0	0	0
3	1	6	6	0	0	0	0	0	0
4	1	14	36	24	0	0	0	0	0
5	1	30	150	240	120	0	0	0	0
6	1	62	540	1560	1800	720	0	0	0
7	1	126	1806	8400	16800	15120	5040	0	0
8	1	254	5796	40824	126000	191520	141120	40320	0
9	1	510	18150	186480	834120	1905120	2328480	1451520	362880

这一类问题利用下面的知识也能解，不过需要分好几类加起来. 注意平均分组即可.

图 1: 原来我早就玩过这东西

6 后记

显然，阶乘也能分解成幂次的和（全部展开就是了），但是系数是什么呢？其实和第一类斯特林数有些关系。有兴趣的读者可以查看“悬赏”中相关内容和其他资料。

感谢 zx 的人工 ocr。

声明

1. 博客内容仅为经验之谈，如认为有问题请带着批判性思维自行辨别或与我讨论，本人不负责因盲目应用博客内容导致的任何损失。
2. 虽然文章的思想不一定是原创的，但是写作一定是原创的，如有雷同纯属巧合。

博客信息 此文章的博客来源：https://vortexer99.github.io/

自豪地采用 LaTeX！