庄逸的数学与技术屋

旧文重发 • 调整法证明广义均值不等式

Vortexer99

目录

1 题目

已知：对于 $i = 1, 2 \dots n$, $\alpha_i > 0$, $x_i > 0$, $\sum_{i=1}^n \alpha_i = 1$

证明：

$$f(t) = \begin{cases} (\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i^t)^{\frac{1}{t}}, & t \neq 0 \\ \prod_{i=1}^n x_i^{\alpha_i}, & t = 0 \end{cases} \tag{1}$$

在 $\mathbb{R}$ 上是 t 的非减函数。

2 说明

对于 $\alpha_i = 1/n$，$t = 2, 1, 0, -1$ 时即是常见的均值不等式：均方根不小于算数平均不小于几何平均不小于调和平均。去掉 α_i 的这个限制，实际上是表示加权。

3 简单剖析

先考虑 $t \neq 0$ 的情况。

$$\ln f(t) = \frac{\ln (\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i^t)}{t}$$

求导得到

$$\frac{f'(t)}{f(t)} = \frac{1}{t^2} \cdot \left(t \cdot \frac{\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i^t \ln x_i}{\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i^t} - \ln \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i^t \right) \right)$$

由 $f(t) > 0$ 知，要 $f'(t) \geq 0$，只需要说明

$$t \cdot \frac{\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i^t \ln x_i}{\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i^t} - \ln \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i^t \right) \geq 0$$

即需说明

$$t \cdot \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i^t \ln x_i \geq \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i^t \right) \cdot \ln \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i^t \right)$$

注意到 $t \ln x_i = \ln x_i^t$，取 $\beta_i = \alpha_i x_i^t$，并记 $B = \sum_{i=1}^n \beta_i$。则上不等式化为

$$\sum_{i=1}^n \beta_i \ln \frac{\beta_i}{\alpha_i} \geq \ln B \cdot \sum_{i=1}^n \beta_i$$

移项，即需要证明

$$\sum_{i=1}^n \beta_i \ln \frac{\beta_i}{B} \geq \sum_{i=1}^n \beta_i \ln \alpha_i$$

4 核心・调整法

在原题中，x_i, α_i 是给定，独立的，β_i 是由他们构造出来的。但是这里可以把 β_i 和 α_i 看成是独立的，而不去关注 x。注意到不等式两边形式类似，只有对数中的项不同，且 α_i 只出现在右边的对数项中。同时，还满足类似的性质：

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{\beta_i}{B} = 1 \tag{2}$$

那么相当于说对于函数

$$h(y_1, \ldots, y_n) = h(y_i) := \sum_{i=1}^{n} \beta_i \ln y_i \qquad \sum y_i = 1 \tag{3}$$

在 $h(\beta_i/B)$ 时取到最大值。

我们可以感性地认为 β_i/B 是一个“平衡”的分配，任何偏离平衡的影响都会导致函数值减小。下面来证明这一点。

考虑求和式中的任意两项，不妨取 $S = \beta_1 \ln \frac{\beta_1}{B} + \beta_2 \frac{\beta_2}{B}$。引入一个对最优分配 β_i/B 的在这两项上的微小扰动 δ，注意到需要保持不改变分配的和为 1，考虑偏差函数

$$g(\delta) = \beta_1 \ln\left(\frac{\beta_1}{B} + \delta\right) + \beta_2 \ln\left(\frac{\beta_2}{B} - \delta\right) - S$$

求导得

$$g'(\delta) = \frac{B\beta_1}{\beta_1 + B\delta} - \frac{B\beta_2}{\beta_2 - B\delta} = \frac{-\delta\left(\beta_1 + \beta_2\right)}{\left(\frac{\beta_1}{B} + \delta\right)\left(\frac{\beta_2}{B} - \delta\right)}$$

显然，当 $\delta > 0$ 时 $g'(\delta) < 0$，$\delta < 0$ 时 $g'(\delta) > 0$ 因此 $g(0)$ 是极大值也是最大值，而 $g(0) = 0$，因此 $g(\delta) < 0 (\delta \neq 0)$。

于是我们证明了对最优比例的任何扰动，都会使求和变小。也就是说，任何不符合最优比例的求和式，都可以通过一系列取出两项进行调整操作，在接近平衡，向最优比例靠近的同时使值变大。

举个直观的例子：假设最优比例是 $\left(\frac{1}{2}\ \frac{1}{4}\ \frac{1}{8}\ \frac{1}{8}\right)$，由比例 $(a\ b\ c\ d)$ 决定的求和值为 $T\,[a\ b\ c\ d]$，从 $T\left[\frac{1}{3}\ \frac{1}{3}\ \frac{1}{6}\ \frac{1}{6}\right]$ 开始，有不等式串

$$T\left[\frac{1}{3}\ \frac{1}{3}\ \frac{1}{6}\ \frac{1}{6}\right] < T\left[\frac{1}{2}\ \frac{1}{6}\ \frac{1}{6}\ \frac{1}{6}\right] < T\left[\frac{1}{2}\ \frac{1}{4}\ \frac{1}{12}\ \frac{1}{6}\right] < T\left[\frac{1}{2}\ \frac{1}{4}\ \frac{1}{8}\ \frac{1}{8}\right]$$

注意其中调整时保持和不变

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} \qquad \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{4} + \frac{1}{12} \qquad \frac{1}{12} + \frac{1}{6} = \frac{1}{8} + \frac{1}{8} \tag{4}$$

于是我们证明了

$$\sum_{i=1}^{n} \beta_i \ln \frac{\beta_i}{B} \geq \sum_{i=1}^{n} \beta_i \ln \alpha_i$$

简单计算 $t \to 0$ 的极限与单独定义的相等，说明函数的连续性，则原命题得证。

5 其他・下凸证明法

（忘了是哪个同学提供的了）

设 $f(x)=x\ln x$，$f(x)$ 下凸证明略.

$$\left(\sum\alpha_i x_i^t\right)\left(\ln\left(\sum\alpha_i x_i^t\right)\right)=f\left(\sum\alpha_i x_i^t\right)$$

$$f\left(\sum\alpha_i x_i^t\right)\leq\sum\alpha_i f\left(x_i^t\right)$$

$$\sum\alpha_i f\left(x_i^t\right)=\sum\alpha_i x_i^t\ln\left(x_i^t\right)$$

因此

$$\left(\sum\alpha_i x_i^t\right)\left(\ln\left(\sum\alpha_i x_i^t\right)\right)\leq\sum\alpha_i x_i^t\ln x_i^t$$

6 后记

关于 α，β，x 的互相影响而产生的争论，因为已经找到了一个比较好的解释并写在上面，就删去了。

感谢 zx 的人工 ocr。
