庄逸的数学与技术屋

旧文重发 • 隐函数求导技巧

Vortexer99

目录

1　技巧

公式：

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right) \tag{1}$$

证：

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)=\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} \tag{2}$$

2　例子

$$y=1+xe^y\qquad \text{求}\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} \tag{3}$$

两边求导得

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=e^y+xe^y\cdot\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} \tag{4}$$

于是

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{e^y}{1-xe^y} \tag{5}$$

继续两边对 x 求导会比较麻烦, 注意到

$$1-xe^y=2-(1+xe^y)=2-y \tag{6}$$

有

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{e^y}{2-y} \tag{7}$$

应用公式，得

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\left(\frac{e^y}{2-y}\right)=\frac{e^y}{2-y}\cdot\frac{e^y(2-y)+e^y}{(2-y)^2}=\frac{e^{2y}(3-y)}{(2-y)^3} \tag{8}$$

3　小结

此公式对于不便用自变量 x 表达函数及其导数，而方便用 y 表达的情况较为有用。

此公式可进一步推得

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\left[\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2\right] \tag{9}$$

请读者自行验证。

最后感谢船的人工 ocr。

声明

博客信息　此文章的博客来源：https://vortexer99.github.io/

自豪地采用 LaTeX！