【悬赏 001】

求证:

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\mathrm{C}_n^k k^n=n!\ \ (\mathrm{n}\in\mathbf{N}^*)$$

请找出纯代数证法。

【等价命题】

A: $\sum_{k=1}^{n}(-1)^{n-k}\mathrm{C}_n^k k^n=n!\ \ (\mathrm{n}\in\mathbf{N}^*)$

B: $\sum_{k=0}^{n}(-1)^{k}\mathrm{C}_n^k (n-k)^n=n!\ \ (\mathrm{n}\in\mathbf{N}^*)$

C: $\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^{n-k}k^n}{k!\,(n-k)!}=1\ \ (\mathrm{n}\in\mathbf{N}^*)$

【说明】

很神奇，利用正整数的幂次和组合数表示出了阶乘。

举几个例子：$1!=\mathrm{C}_1^1 1^1=1$

$2!=-\mathrm{C}_2^1 1^2+\mathrm{C}_2^2 2^2=-2+4=2$

$3!=\mathrm{C}_3^1 1^3-\mathrm{C}_3^2 2^3+\mathrm{C}_3^3 3^3=3-24+27=6$

$4!=-\mathrm{C}_4^1 1^4+\mathrm{C}_4^2 2^4-\mathrm{C}_4^3 3^4+\mathrm{C}_4^4 4^4$

$\quad=-4+96-324+256=24$

【问题背景】

① m 个不同的球放进 n 个不同的盒子里，

要求每个盒子至少有一个球，方案总数

$$f(m,n)=\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\mathrm{C}_n^k k^m$$

当 m=n 时，每个盒子里只能装一个球，

显然方案总数为 n!，于是

$$f(n,n)=\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\mathrm{C}_n^k k^n=n!$$

注：这是一种证法，但比较好奇有没有

不构造实际情景，纯代数的证法。

② 一号数学研究指出，n 次幂可以分解成阶乘和

$$n^m=\sum_{s=0}^{m-1}x_{m,s}\prod_{q=0}^{s}(n-q)$$

其中$x_{m,s}$为第二类斯特林数

$$x_{m,s}=\frac{1}{s!}\sum_{k=0}^{s}(-1)^k\,\mathrm{C}_s^k(s-k)^m$$

命题等价于求证$x_{m,m}=1$

③ 一号数学研究指出，n 次幂可以分解成阶乘和

而所需证明的等式是用阶乘和合成 n 次幂，

似乎有互逆关系。

【悬赏 001 解】

【证】

引理

范德蒙行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1\le i<j\le n} (x_j - x_i)$

证略。

断言 $\sum_{j=0}^{n}(-1)^j f(b_j) C_n^j = (-1)^n a_n n!\, d^n$

其中 $f(x) = a_n x^n + \cdots + a_0, \{b_n\}$是公差为$d$的等差数列$, d \neq 0$

令$f(x) = x^n, b_n = n,$则$d = 1$

即得到$\sum_{j=0}^{n}(-1)^j j^n C_n^j = (-1)^n n!$

断言的证明:

记$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_{n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_1^n & b_2^n & \cdots & b_{n+1}^n \end{vmatrix}$, 由引理, $D = \prod_{1\le i<j\le n+1} (b_j - b_i)$

记D第$n+1$ 行j列位置(即b_j^n)的余子式为D_j（非代数余子式）

$D_j = \begin{vmatrix} 1 & \cdots & \widehat{1} & \cdots & 1 \\ b_1 & \cdots & \widehat{b_j} & \cdots & b_{n+1} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ b_1^{n-1} & \cdots & \widehat{b_j^{n-1}} & \cdots & b_{n+1}^{n-1} \end{vmatrix}$, 其中$\begin{pmatrix} \widehat{1} \\ \widehat{b_j} \\ \vdots \\ \widehat{b_j^{n-1}} \end{pmatrix}$表示行列式中除去这一列

由引理可知$D_j = \prod_{\substack{1\le s<t\le n+1 \\ s,t\neq j}} (b_t - b_s) = \dfrac{(-1)^{n+1+j} \prod_{1\le s<t\le n+1}(b_t - b_s)}{\prod_{\substack{1\le s<t\le n+1 \\ s=j}}(b_t - b_s) \prod_{\substack{1\le s<t\le n+1 \\ t=j}}(b_t - b_s)}$

$= \dfrac{D}{\prod_{j<t\le n+1}(b_t - b_j) \prod_{1\le s<j}(b_j - b_s)}$

由b_n的等差数列性质可知$, b_t - b_j = (t-j)d, b_j - b_s = (j-s)d,$

$$\prod_{j<t\le n+1}(b_t - b_j) = \prod_{t=j+1}^{n+1}(t-j)d = (n+1-j)!\ d^{n+1-j}$$

$$\prod_{1\le s<j}(b_j - b_s) = \prod_{s=1}^{j-1}(j-s)d = (j-1)!\ d^{j-1}$$

于是$D_j=\dfrac{D}{(n+1-j)!\ d^{n+1-j}(j-1)!\ d^{j-1}}=\dfrac{C_n^{j-1}D}{n!\ d^n}$

考虑$D'=\begin{vmatrix}1 & 1 & \cdots & 1\\ b_1 & b_2 & \cdots & b_{n+1}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ f(b_1) & f(b_2) & \cdots & f(b_{n+1})\end{vmatrix}$

注意到D'与D仅有最后一行不同,将D'由最后一行展开,得到

$$D'=\sum_{j=1}^{n+1}(-1)^{n+1+j}f\left(b_j\right)D_j=\sum_{j=1}^{n+1}(-1)^{n+1+j}f\left(b_j\right)\frac{C_n^{j-1}D}{n!\ d^n}$$

另一方面,由行列式的行变换,可将$f\left(b_j\right)$次数低于n的项全部消去

可知$D'=\begin{vmatrix}1 & 1 & \cdots & 1\\ b_1 & b_2 & \cdots & b_{n+1}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a_nb_1^n & a_nb_2^n & \cdots & a_nb_{n+1}^n\end{vmatrix}=a_nD$

于是$\displaystyle\sum_{j=1}^{n+1}(-1)^{n+1+j}f\left(b_j\right)\frac{C_n^{j-1}D}{n!\ d^n}=a_nD$

由$d\neq 0$ 可知$\{b_n\}$互不相同,由引理可知$D\neq 0$

约去D,整理得到$\displaystyle\sum_{j=1}^{n+1}C_n^{j-1}(-1)^{n+1+j}f\left(b_j\right)=n!\,a_n\,d^n$

即$\displaystyle\sum_{j=0}^{n}C_n^{j}(-1)^{j}f\left(b_j\right)=(-1)^n n!\,a_n\,d^n$ ■

【思考】

$\displaystyle\sum_{j=0}^{n}(-1)^{j}f\left(b_j\right)C_n^j=(-1)^n a_n n!\,d^n$是一个很有用的式子，从几方面考量它的意义。

首先,待定量是多项式$f(x)$和等差数列b_n,这个式子将它们联系起来。

其次，公式可以变形为$a_n=\dfrac{1}{n!\,d^n}\left(\displaystyle\sum_{j=0}^{n}(-1)^{n-j}f\left(b_j\right)C_n^j\right)$

这就是说我们能通过多项式在$n+1$ 个等间隔点的值确定出多项式的首项系数。

不过这是比插值公式相对较弱的一个结论。

再者，对于形如$\displaystyle\sum_{j=0}^{n}(-1)^{j}C_n^j y_n$ 的式子，今后也有办法可以计算。

只需要找$f(x)$,使得f在一系列等差点$b_0,\dots,b_n$上分别取到$y_0,\dots,y_n$

由于取等差点的目的只是为了求得首项系数，可以考虑$0,1,\dots,n$

通过插值公式，能得到$f(x)$的首项系数，则该式的值为$(-1)^n n!\,a_n\,d^n$

【一个推论】

$$\sum_{j=0}^{n}C_n^{j}(-1)^{j}f\left(b_j\right)=(-1)^n n!\,a_n\,d^n$$

当$f(x)$最高次系数为$k,k<n$时,$a_n=0$

此时$\sum_{j=0}^{n}C_n^j(-1)^jf(b_j)=0$

特别地,取$f(x)=x^k,k<n,b_j=j,\sum_{j=0}^{n}C_n^j(-1)^jj^k=0$

这是悬赏 002 的主题。

更多应用可见参考文献相关内容。

【说明】

这个解法已经十分巧妙，并且也算是符合了代数证法的要求。当然，如果你有其他更巧妙的方法，也欢迎分享给我。

【参考文献】

历届美国大学生数学竞赛试题集——第一卷（1938~1949）:152-156

【悬赏 002】

函数$f(m,n)=\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\mathrm{C}_n^kk^m\quad(m,n\in\boldsymbol{N}^*)$

请从代数角度证明:

当$m<n$时$f(m,n)\equiv 0$

【等价命题】

A:函数 f 中到底是什么结构决定了这么一个性质?

B:能否构造出一个“正常”（如不间断，不分段，不单独定义,

解析式不复杂，可描点，无高等函数等）的二元函数

也具有类似的性质?

如果能，它们有什么共同点?

【说明】

看一下函数值表。

1	0	0	0	0	0	0	0
1	2	0	0	0	0	0	0
1	6	6	0	0	0	0	0
1	14	36	24	0	0	0	0
1	30	150	240	120	0	0	0
1	62	540	1560	1800	720	0	0
1	126	1806	8400	16800	15120	5040	0
1	254	5796	40824	126000	191520	141120	40320

注意到左下角都是一般的正数，右上角却全为 0

划重点，刚好全是 0，而不是别的什么。

举几个例子:

$$f(1,2)=\sum_{k=0}^{2}(-1)^{2-k}\mathrm{C}_2^k k^1=-2+2=0$$

$$f(3,4)=\sum_{k=0}^{4}(-1)^{4-k}\mathrm{C}_4^k k^3=-4+48-108+64=0$$

$$f(3,5)=\sum_{k=0}^{5}(-1)^{5-k}\mathrm{C}_5^k k^3=5-80+270-320+125=0$$

$$f(4,7)=\sum_{k=0}^{7}(-1)^{7-k}\mathrm{C}_7^k k^4$$

$$=7-336+2835-8960+13125-9072+2401=0$$

每一项数字有比十小的个位数，也有成百上千，

然而到底是什么魔力使得它们之和总刚好为 0？

【问题背景】

④ $f(m,n)$为 m 个不同的球放进 n 个不同的盒子，

要求每个盒子至少有一个球的方案总数，显然

当 m<n 时，找不到满足要求的方案。

注：这是一种证法，但比较好奇有没有

不构造实际情景，纯代数的证法。

⑤ 第二类斯特林数 S 也有类似的性质。

它与 f 的关系如下

$$\mathrm{S}(m,n)=\frac{1}{n!}f(m,n)$$

【进展】

在【悬赏 001·解】中，利用

$$\sum_{j=0}^{n}C_n^j(-1)^j f\left(b_j\right)=(-1)^n n!\,a_n\,d^n$$

得到了$k<n$时

$$\sum_{j=0}^{n}C_n^j(-1)^j j^k=0$$

【悬赏 003】

定义$p_k\coloneqq\sum_{t=1}^{n}x_t^k\ (k\in\mathbf{Z})$

试用初等对称多项式$s_1,s_2,\dots,s_n$，

表示出$p_k\coloneqq\sum_{t=1}^{n}x_t^k\ (k<0\text{ 时})$

递推式亦可。

【等价命题】

A: 试用初等对称多项式表示出 $\sum_{t=1}^{n}\prod_{\substack{r=1\\r\neq t}}^{n}x_r^k$

【说明】

初等对称多项式形式与韦达定理相同。

$s_1=x_1+x_2+\cdots+x_n$

$s_2=x_1x_2+x_1x_3+\cdots+x_{n-1}x_n$

…

$s_n=x_1x_2\ldots x_n$

当$k=-1$时，事情还比较简单。

$$p_{-1}=\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\cdots+\frac{1}{x_n}=\frac{s_{n-1}}{s_n}$$

当$k=-2$时，就十分困难了。

$$p_{-2}=\frac{1}{x_1^2}+\frac{1}{x_2^2}+\cdots+\frac{1}{x_n^2}$$

$$=\frac{x_2^2x_3^2\ldots x_n^2+\cdots+x_1^2x_2^2\ldots x_{n-1}^2}{s_n^2}$$

经由电脑计算找规律得到

$$p_{-2}=\frac{s_{n-1}^2-2s_{n-2}s_n}{s_n^2}$$

$$p_{-3}=\frac{s_{n-1}^3-3s_{n-2}s_{n-1}s_n+3s_{n-3}s_n^2}{s_n^3}$$

【背景】

关于s_k和p_k的联系，有如下的牛顿公式

$$p_k-s_1p_{k-1}+s_2p_{k-2}+\cdots+(-1)^{k-1}s_{k-1}p_1+(-1)^ks_kk=0,\qquad 1\le \mathrm{k}\le \mathrm{n}$$

$$p_k-s_1p_{k-1}+s_2p_{k-2}+\cdots+(-1)^{n-1}s_{n-1}p_{k-n+1}+(-1)^ns_np_{k-n}=0,\qquad \mathrm{k}\ge \mathrm{n}$$

结合克拉默公式有

$$p_k=\begin{vmatrix} s_1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0\\ 2s_2 & s_1 & 1 & 0 & \cdots & 0\\ 3s_3 & s_2 & s_1 & 1 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ (k-1)s_{k-1} & s_{k-2} & s_{k-3} & s_{k-4} & \cdots & 1\\ ks_k & s_{k-1} & s_{k-2} & s_{k-3} & \cdots & s_1 \end{vmatrix}$$

$$s_k=\frac{1}{k!}\begin{vmatrix} p_1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0\\ p_2 & p_1 & 1 & 0 & \cdots & 0\\ p_3 & p_2 & p_1 & 1 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ p_{k-1} & p_{k-2} & p_{k-3} & p_{k-4} & \cdots & 1\\ p_k & p_{k-1} & p_{k-2} & p_{k-3} & \cdots & p_1 \end{vmatrix}$$

在证明牛顿公式的过程中(非标准证法),

设$x_1,x_2,\ldots,x_n$为方程$x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n=0$的$n$个互不相同的根。

则$s_1=-a_1,s_k=(-1)^k a_k$，因而$a_k=(-1)^k s_k$

于是$x^n-s_1x^{n-1}+\cdots+(-1)^n s_n=0$

在$k\geq n$时，方程两边乘x^{k-n}，并代入$x_1,x_2,\ldots,x_n$求和后得到

$p_k-s_1p_{k-1}+s_2p_{k-2}+\cdots+(-1)^{n-1}s_{n-1}p_{k-n+1}+(-1)^n s_n p_{k-n}=0$

在$k\leq n$时，先考虑$k=n-1$,方程两边除以x，并代入$x_1,x_2,\ldots,x_n$求和后得到

$p_{\mathrm{n}-1}-s_1p_{n-2}+s_2p_{n-3}+\cdots+(-1)^{n-1}s_{n-1}p_0+(-1)^n s_n p_{-1}=0,$

利用$p_{-1}=\dfrac{s_{n-1}}{s_n}$，$p_0=n$得到

$p_{\mathrm{n}-1}-s_1p_{n-2}+s_2p_{n-3}+\cdots+(-1)^{n-1}(n-1)s_{n-1}=0,$

命题成立。

在$k=n-r$时，做类似的操作，则需要考虑$p_{-1},p_{-2},\ldots,p_{-r}$

由于$p_k(k<0)$表达式难以求得，因而这样无法证明牛顿公式第一式。

但是牛顿公式可以用别的方法证得，也许能由牛顿公式去反推$p_{-1},p_{-2},\ldots,p_{-r}$

*我觉得这样至少能摆弄个递推公式出来，把这个机会留给读者。

【悬赏 003 解】

设$x_1,x_2,\ldots,x_n$的初等对称多项式

$s_1=x_1+x_2+\cdots+x_n$

$s_2=x_1x_2+x_1x_3+\cdots+x_{n-1}x_n$

…

$s_n=x_1x_2\ldots x_n$

再类似地，

设$y_1,y_2,\ldots,y_n$的初等对称多项式为

$t_1,t_2,\ldots,t_n$，并且规定

$y_k=\dfrac{1}{x_k},k=1,2,\ldots,n$

设$p_k=\sum_{t=1}^{n}x_n^k$,$q_k=\sum_{t=1}^{n}y_n^k$

则$p_{-k}=q_k$

当$k>0$时

由牛顿公式等知

q_k可用$q_1,\ldots,q_{k-1}$和$t_1,\ldots,t_k$递推表示

或可直接用$t_1,\ldots,t_k$表示。

因此要想用$s_1,\ldots,s_n$表达p_{-k},

只需用$s_1,\ldots,s_n$表示$t_r,r=1,2,\ldots,k$

作一些试验:

$$t_1=\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\cdots+\frac{1}{x_n}$$

通分后分母显然为s_n ,分子为n项之和,

每一项都是x_1到x_n缺一项的乘积

刚好为s_{n-1},于是$t_1=\frac{s_{n-1}}{s_n}$

$$t_2=\frac{1}{x_1x_2}+\frac{1}{x_1x_3}+\cdots+\frac{1}{x_{n-1}x_n}$$

通分后分母仍然为s_n

分子的每一项是x_1到x_n缺两项的乘积

刚好为s_{n-2}

以此类推，可得

$$t_k=\frac{s_{n-k}}{s_n}$$

在牛顿公式中，将p换为q,s换为t，k换为k',即

$$q_{k'}-t_1q_{k'-1}+t_2q_{k'-2}+\cdots+(-1)^{k'-1}t_{k'-1}q_1+(-1)^{k'}t_{k'}k'=0,\qquad 1\le k'\le n$$
$$q_{k'}-t_1q_{k'-1}+t_2q_{k'-2}+\cdots+(-1)^{n-1}t_{n-1}q_{k'-n+1}+(-1)^{n}t_nq_{k'-n}=0,\qquad k'\ge n$$

并代入

$$t_{k'}=\frac{s_{n-k'}}{s_n},q_{k'}=p_{-k'},k'=-k$$

得到

$$p_k-\frac{s_{n-1}}{s_n}p_{k+1}+\frac{s_{n-2}}{s_n}p_{k+2}+\cdots+(-1)^{k-1}\frac{s_{n+k+1}}{s_n}p_{-1}+(-1)^k\frac{s_{n+k}}{s_n}(-k)=0,\qquad -n\le k\le -1$$
$$p_k-\frac{s_{n-1}}{s_n}p_{k+1}+\frac{s_{n-2}}{s_n}p_{k+2}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{s_1}{s_n}p_{n+k-1}+(-1)^n\frac{s_0}{s_n}p_{n+k}=0,\qquad k\le -n$$

关于行列式，类似有

$$q_{k'}=\begin{vmatrix}\frac{s_{n-1}}{s_n} & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0\\ 2\frac{s_{n-2}}{s_n} & \frac{s_{n-1}}{s_n} & 1 & 0 & \cdots & 0\\ 3\frac{s_{n-3}}{s_n} & \frac{s_{n-2}}{s_n} & \frac{s_{n-1}}{s_n} & 1 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ (k'-1)\frac{s_{n-k'+1}}{s_n} & \frac{s_{n-k'+2}}{s_n} & \frac{s_{n-k'+3}}{s_n} & \frac{s_{n-k'+4}}{s_n} & \cdots & 1\\ k'\frac{s_{n-k'}}{s_n} & \frac{s_{n-k'+1}}{s_n} & \frac{s_{n-k'+2}}{s_n} & \frac{s_{n-k'+3}}{s_n} & \cdots & \frac{s_{n-1}}{s_n}\end{vmatrix}$$

$$=\frac{1}{s_n^{k'}}\begin{vmatrix} s_{n-1} & s_n & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 2s_{n-2} & s_{n-1} & s_n & 0 & \cdots & 0 \\ 3s_{n-3} & s_{n-2} & s_{n-1} & s_n & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (k'-1)s_{n-k'+1} & s_{n-k'+2} & s_{n-k'+3} & s_{n-k'+4} & \cdots & s_n \\ ks_{n-k'} & s_{n-k'+1} & s_{n-k'+2} & s_{n-k'+3} & \cdots & s_{n-1} \end{vmatrix}$$

于是$p_k = s_n^k \begin{vmatrix} s_{n-1} & s_n & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 2s_{n-2} & s_{n-1} & s_n & 0 & \cdots & 0 \\ 3s_{n-3} & s_{n-2} & s_{n-1} & s_n & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (-k-1)s_{n+k+1} & s_{n+k'+2} & s_{n+k'+3} & s_{n+k'+4} & \cdots & s_n \\ -ks_{n+k} & s_{n+k'+1} & s_{n+k'+2} & s_{n+k'+3} & \cdots & s_{n-1} \end{vmatrix} (\mathrm{k}<0)$

作为验算，考虑

$$p_{-2}=\frac{1}{s_n^2}\begin{vmatrix} s_{n-1} & s_n \\ 2s_{n-2} & s_{n-1} \end{vmatrix}=\frac{s_{n-1}^2-2s_{n-2}s_n}{s_n^2}$$

$$p_{-3}=\frac{1}{s_n^3}\begin{vmatrix} s_{n-1} & s_n & 0 \\ 2s_{n-2} & s_{n-1} & s_n \\ 3s_{n-3} & s_{n-2} & s_{n-1} \end{vmatrix}=\frac{s_{n-1}^3+3s_n^2s_{n-3}-3s_ns_{n-1}s_{n-2}}{s_n^3}$$

与之前电脑计算得到的结果相同。

【悬赏 004】

定义运算$(x)_0=1$

$(x)_n = x(x-1)\dots(x-n+1), n\in\mathbf{N}^*$

证明:

$$(a+b)_n=\sum_{k=0}^{n}\mathrm{C}_n^k\,(a)_{n-k}(b)_k$$

【高级目标】

利用$(x)_n$和x^n的相似性证明上面的命题。

【说明】

长得特别像二项式定理,

结合悬赏 001 还有之前的一号数学研究,

似乎可以说$(x)_n$和普通的幂x^n有相似的性质。

不知道有没有可能找一个群同构,

或者类似的东西来帮助证明以上命题?

【例子】

$$(a+b)_1=\sum_{k=0}^{1}\mathrm{C}_1^k\,(a)_{1-k}(b)_k=a+b$$

$$(a+b)_2=(a+b)^2-(a+b)=a^2+2ab+b^2-a-b$$

$$\sum_{k=0}^{2}\mathrm{C}_2^k\,(a)_{2-k}(b)_k=(a)_2+2ab+(b)_2=a^2-a+2ab+b^2-b$$

$$(a+b)_3=(a+b)^3-3(a+b)^2+2(a+b)$$

$= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 - 3a^2 - 6ab - 3b^2 + 2a + 2b$

$$\sum_{k=0}^{3} \mathrm{C}_3^k (a)_{3-k}(b)_k = (a)_3 + 3(a)_2(b)_1 + 3(a)_1(b)_2 + (b)_3$$

$= a^3 - 3a^2 + 2a + 3a^2b - 3ab + 3ab^2 - 3ab + b^3 - 3b^2 + 2b$

【背景】

① $(x)_n$称为 Pochhammer 函数，在维基百科它的词条

（亦'Falling and rising factorials'）中记载了需要证明的等式，

但似乎没有直接给出证明。

② 在维基百科'Binomial type'词条中，满足关系式

的多项式序列p_n被称作具有二项式性质，

它们形成一个集合，除了$(x)_n$外，

阿贝尔多项式$p_n(x) = x(x - an)^{n-1}$等也在其中。

③ 一号数学研究指出

$x^n = \sum_{t=1}^{n} \mathrm{S}_{n,t-1}(x)_t$，其中$\mathrm{S}_{n,m}$为第二类斯特林数

满足$S_{n,m} = \frac{1}{m!}\sum_{k=0}^{m}(-1)^k C_m^k (m-k)^n$

④ 无符号的第一类斯特林数$c_{n,m}$，

表示n个不同元素构成m个圆排列的数目

带符号的第一类斯特林数$s_{n,k} = (-1)^{n-k}c_{n,k}$

$(x)_n = \sum_{k=0}^{n} s_{n,k} x^k$，

和上面的相反，把阶乘拆成了幂次和。

【悬赏 005】

结合极限严格证明:

$f(x) = \text{“}\lim_{a\to 0}\text{”}\frac{a}{x^2 + x}$

是方程$f(f(x)) = x^2 + x$的解

或

$f(x) = \text{“}\lim_{a\to 0}\text{”}\frac{a}{x^2 + x}$

不是方程$f(f(x)) = x^2 + x$的解

【必由之路】

请给$f(x)=$“$\lim\limits_{a\to 0}$”$\dfrac{a}{x^2+x}$

下一个准确的定义。

【说明】

我们先对$\dfrac{a}{x^2+x}$复合，得到

$$\frac{a}{\left(\frac{a}{x^2+x}\right)^2+\frac{a}{x^2+x}}=\frac{(x^2+x)^2}{a+(x^2+x)}$$

再令a趋向于 0，就得到x^2+x

乍一看，似乎$f(x)=\lim\limits_{a\to 0}\dfrac{a}{x^2+x}$就是解。

但是这样一来，$f(x)$就直接成为 0 了。

那么，我们让a不等于 0，

a取 $1, 0.01, 0.00001 \ldots\ldots$

则此时$f(x)$不是 0，可以正常复合，

由复合后为$\dfrac{(x^2+x)^2}{a+(x^2+x)}$可知

结果会越来越趋向于x^2+x

所以就有两个问题:

1、结合极限的定义，到底应该如何定义

这样的$f(x)$?

2、判断这个$f(x)$到底是不是方程的解。

最头疼的是第一个问题，有了定义之后

第二个问题就不足为惧了。

【背景】

知乎有“f(f(x))=x^2+x，如何求 f(x)？”的问题，

讨论十分丰富，甚至有一大类类似方程的可解性。

不过似乎没有和这个悬赏相关的内容。

【悬赏 007】

$\alpha \in (0,1),\quad x_0=0, x_k \in \left(0,\dfrac{1}{\alpha}\right), k=1,2,\ldots$

设 $S=\sum\limits_{k=1}^{\infty}\left(\left(\prod\limits_{l=0}^{k-1}(1-\alpha\, x_l)\right)\alpha x_k\left(\sum\limits_{l=0}^{k}x_l\right)\right)$

满足$\sum\limits_{k=1}^{\infty}\left(\left(\prod\limits_{l=0}^{k-1}(1-\alpha\, x_l)\right)\alpha x_k\right)=1$

求一个 x_n 的通项公式，使得 S 最小。

【背景】

为了提高经济效益，某商场设置了一台抽奖机器，规则如下:

（1）每一次抽奖的初始中奖概率为零。
（2）每投入一个币，当次中奖概率就增加α（$\alpha \in (0,1)$）。
（3）一个人抽奖的次数和硬币数不限，机器能吞的硬币不限。
这里计算的时候可以任意给定概率，不受整数限制。
然而概率当然不能比 0 低或者比 1 大。

小明非常想要中奖的礼物，他拿着用了毕生心血攒下来的无穷多的硬币去抽奖。虽然硬币有无穷多，但是小明还是希望能够节约一些。于是他开始苦恼应该投多少硬币。
小张说："当然是一次投多一些了，虽然花的多，但是几率大，没几次就有很大概率中奖。"
然而小红觉得不对："一次投太多感觉很浪费，少投一些，花的硬币就会少一点。"
听了两个知心好友的话，小明决定相信数学。他在心里盘算着：

我要算一下每种方案平均我要花的硬币数量。
因为失败几率总存在，所以理论上我有可能要投无限次硬币。
考虑直到第 k 次抽奖我才中，这说明前面已经失败了 $k-1$ 次
之前第 t 次我投了 x_t 个硬币，那一次失败概率是$(1-x_t\alpha)$
所以我连跪 $k-1$ 局的概率是 $\prod_{t=1}^{k-1}(1-\alpha\, x_t)$
为了 $k=1$ 的时候这个式子也能用，引入 $x_0=0$，
连跪 $k-1$ 局的概率是 $\prod_{t=0}^{k-1}(1-\alpha\, x_t)$
这一次我投了 x_k 个硬币，成功概率是 $x_k\alpha$
总的来说，我在第 k 次中奖的概率为 $\prod_{t=0}^{k-1}(1-\alpha\, x_t)\, x_k\alpha$
我在第 k 次中奖，总共已经给机器喂了 $\sum_{t=0}^{k} x_t$ 个硬币
于是就能算出中奖所需要的硬币数数学期望。

$$S=\sum_{k=1}^{\infty}\left(\left(\prod_{t=0}^{k-1}(1-\alpha\, x_t)\right)\alpha x_k\left(\sum_{t=0}^{k} x_t\right)\right)$$

这一串玩意儿似乎在瞪着眼嘲笑小明。
虽然小明能拿着无穷多的硬币，然而当他尝试着对这个有无穷多变量的函数，每个变量求了一遍导，发现并不能拿着这无穷个方程对这一串玩意儿做什么事情。
小张见了这个式子，说："要求最小值？那不是让 x全取零就 OK？这就最小了。"
小明："这样还怎么中奖？"
小张："反正你本来也是失败无穷多次，不一样嘛？"
小明：……（一定有哪儿不对劲）
于是小明写了一个条件把小张拍了回去。

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\left(\prod_{l=0}^{k-1}(1-\alpha\, x_l)\right)\alpha x_k\right)=1$$

小明："只要满足这个条件，我就有必胜的信心。我先试试每次扔固定数量的硬币。"
他掏出了两根无限长的棍子把无穷多个变量串在了一起：
设$x=x_1=x_2=x_3=\cdots$
于是 $S=\sum_{k=1}^{\infty}((1-\alpha\, x)^{k-1}k\alpha x^2)$
这个式子开始瑟瑟发抖，因为小明的差比数列技能是 S+级的。
只见他顺手就抄起了$(1-\alpha\, x)$ 戳在了 S 的复制品身上

$$(1-\alpha\, x)S=\sum_{k=1}^{\infty}((1-\alpha\, x)^{k}k\alpha x^{2})=\sum_{k=2}^{\infty}((1-\alpha\, x)^{k-1}(k-1)\alpha x^{2})$$

和 S 本体一比较，

$$\alpha x\, S=\sum_{k=2}^{\infty}((1-\alpha\, x)^{k-1}\alpha x^{2})+\alpha x^{2}=\frac{(1-\alpha x)\alpha x^{2}}{1-(1-\alpha x)}+\alpha x^{2}=x$$

胜利就在眼前了！只要求出$S(x)$,求最值就容易了!！但是，似乎哪儿有点不对……

$$S=\frac{x}{\alpha x}=\frac{1}{\alpha}=Const$$

小明：？？？？

S:就算我被你化简了，求出了具体的表达式，我还是要对你发出诡异的……

S 的话还没说完就被小明拍在了桌子上。他打算研究更一般的情况，并且猜想如果 S 对所有 x 的取值都是这个结果，那也一定很有意思。