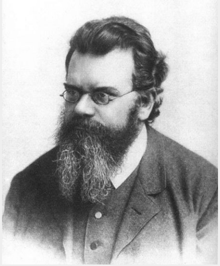
玻尔兹曼积分微分方程

Derivation, application and extension

庄逸

UCAS at Yuquan Rd.

2019/6/26



1. 引入：已完成的将要完成的
2. 力学：分子碰撞模型
3. 统计：碰撞项的计算
4. 玻尔兹曼方程的适用条件
5. 简例：麦克斯韦分布律
6. 引申：BBGKY

引入：已完成的将要完成的

相空间单粒子分布函数满足的方程

$$\frac{\partial f}{\partial t}\mathrm{d}t\mathrm{d}\tau\mathrm{d}\omega = \left\{ \left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_d + \left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_c \right\} \mathrm{d}t\mathrm{d}\tau\mathrm{d}\omega \quad (1)$$

- 漂移项 (drift)：运动引起的分子数变化；
- 碰撞项 (collision)：分子碰撞引起的分子数变化。

* 林 (10.1.4)，按汪书拆分体积微元和动量微元。

玻尔兹曼方程的弛豫时间近似

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \underbrace{\boldsymbol{v} \cdot \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{r}} + \boldsymbol{F} \cdot \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{v}}}_{\text{drift}} = \underbrace{-\frac{f - f^{(0)}}{\tau_0}}_{\text{collision}} \tag{2}$$

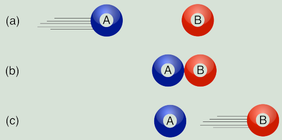
* 汪 (11.1.13)，矢量形式。林 (10.1.11)，漂移项。

- 问题：含有弛豫时间 τ_0，还需要进一步理论计算。
- 方法：先计算一对分子的碰撞，然后再进行统计分析。

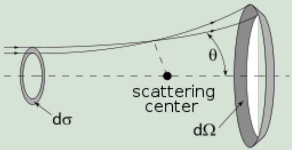
力学：分子碰撞模型

两种碰撞模型

弹性刚球模型



力心点模型



限制

两种模型均有的限制

只考虑平动能，不考虑转动能和振动能
$\Rightarrow$ 单原子分子气体，或碰撞中分子内部状态不改变。

力心点模型的优势

力心点模型可以处理相互作用力的情形，刚球模型可以视为力心点模型在相互作用能 $\varphi(r) = Kr^{-s}$ 当 $s \to \infty$ 极限情况下的近似。(王，§38)

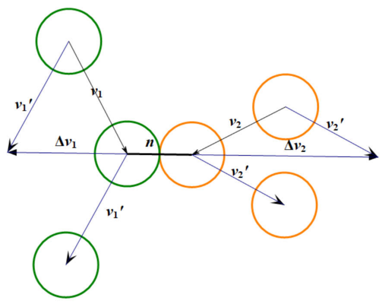
解碰撞方程

$$m_1 \boldsymbol{v}_1 + m_2 \boldsymbol{v}_2 = m_1 \boldsymbol{v}_1' + m_2 \boldsymbol{v}_2' \tag{3}$$

$$\frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 = \frac{1}{2} m_1 v_1'^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2'^2 \tag{4}$$

$$\boldsymbol{v}_1' - \boldsymbol{v}_1 = \lambda_1 \boldsymbol{n} \qquad \boldsymbol{v}_2' - \boldsymbol{v}_2 = \lambda_2 \boldsymbol{n} \tag{5}$$

* 汪 (11.4.1-2)



解碰撞方程

末速度

$$\boldsymbol{v}_1' = \boldsymbol{v}_1 + \left(\frac{2m_2}{m_1 + m_2} (\boldsymbol{v}_2 - \boldsymbol{v}_1) \cdot \boldsymbol{n} \right) \boldsymbol{n} \tag{6}$$

$$\boldsymbol{v}_2' = \boldsymbol{v}_2 - \left(\frac{2m_1}{m_1 + m_2} (\boldsymbol{v}_2 - \boldsymbol{v}_1) \cdot \boldsymbol{n} \right) \boldsymbol{n} \tag{7}$$

* 汪 (11.4.3)

解碰撞方程

末速度

$$\boldsymbol{v}_1' = \boldsymbol{v}_1 + \left(\frac{2m_2}{m_1+m_2}(\boldsymbol{v}_2-\boldsymbol{v}_1)\cdot\boldsymbol{n}\right)\boldsymbol{n} \tag{6}$$

$$\boldsymbol{v}_2' = \boldsymbol{v}_2 - \left(\frac{2m_1}{m_1+m_2}(\boldsymbol{v}_2-\boldsymbol{v}_1)\cdot\boldsymbol{n}\right)\boldsymbol{n} \tag{7}$$

* 汪 (11.4.3)

相对速度不变

$$\boldsymbol{v}_1' - \boldsymbol{v}_2' = \boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{v}_2 + 2((\boldsymbol{v}_2-\boldsymbol{v}_1)\cdot\boldsymbol{n})\boldsymbol{n} \tag{8}$$

$$(\boldsymbol{v}_1' - \boldsymbol{v}_2')\cdot\boldsymbol{n} = -(\boldsymbol{v}_1-\boldsymbol{v}_2)\cdot\boldsymbol{n} \tag{9}$$

* 汪 (11.4.6)

碰撞与反碰撞

碰撞方程

$$m_1\boldsymbol{v}_1 + m_2\boldsymbol{v}_2 = m_1\boldsymbol{v}_1' + m_2\boldsymbol{v}_2'$$

$$\frac{1}{2}m_1 v_1^2 + \frac{1}{2}m_2 v_2^2 = \frac{1}{2}m_1 v_1'^2 + \frac{1}{2}m_2 v_2'^2$$

$$\boldsymbol{v}_1' - \boldsymbol{v}_1 = \lambda_1 \boldsymbol{n} \qquad \boldsymbol{v}_2' - \boldsymbol{v}_2 = \lambda_2 \boldsymbol{n}$$

离开相空间

反碰撞方程

$$m_1\boldsymbol{v}_1' + m_2\boldsymbol{v}_2' = m_1\boldsymbol{v}_1 + m_2\boldsymbol{v}_2$$

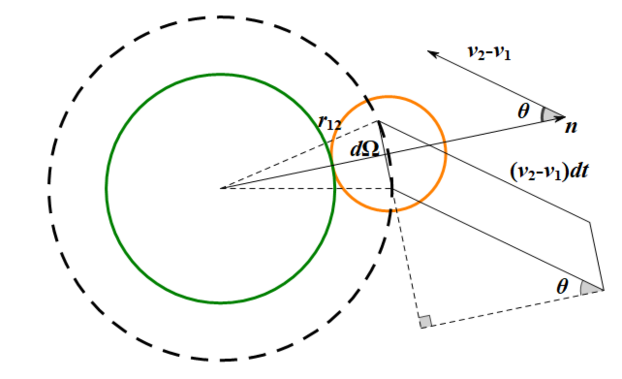
$$\frac{1}{2}m_1 v_1'^2 + \frac{1}{2}m_2 v_2'^2 = \frac{1}{2}m_1 v_1^2 + \frac{1}{2}m_2 v_2^2$$

$$\boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{v}_1' = \lambda_1(-\boldsymbol{n}) \qquad \boldsymbol{v}_2 - \boldsymbol{v}_2' = \lambda_2(-\boldsymbol{n})$$

进入相空间

统计：碰撞项的计算

可发生碰撞的体积元



$$\mathrm{d}\tau_2 = r_{12}^2 \mathrm{d}\Omega \cdot |\boldsymbol{v}_2 - \boldsymbol{v}_1|\,\mathrm{d}t\cos\theta = d_{12}^2 v_r \cos\theta \mathrm{d}t\mathrm{d}\Omega \tag{10}$$

* 汪 (11.4.7$\frac{1}{2}$)

$$r_{12} = d_{12} = \frac{1}{2}(d_1 + d_2) \qquad v_r = |\boldsymbol{v}_2 - \boldsymbol{v}_1| \tag{11}$$

发生碰撞的次数

$$\mathrm{d}\tau_2 = d_{12}^2 v_r \cos\theta \mathrm{d}t \mathrm{d}\Omega \tag{12}$$

单个粒子 1 发生碰撞的次数

$$\begin{aligned}\mathrm{d}N_2 &= f_2 \mathrm{d}\omega_2 \mathrm{d}\tau_2 = f_2 d_{12}^2 v_r \cos\theta \mathrm{d}t \mathrm{d}\Omega \mathrm{d}\omega_2 \qquad (13)\\ &= f_2 \Lambda \mathrm{d}\omega_2 \mathrm{d}\Omega \mathrm{d}t \qquad (14)\\ \Lambda &= d_{12}^2 v_r \cos\theta \qquad (15)\end{aligned}$$

* 汪 (11.4.8-9)

元碰撞数

dt 内发生的总碰撞次数

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}N_2 &= f_2 \Lambda \mathrm{d}\omega_2 \mathrm{d}\Omega \mathrm{d}t && (16) \\
\mathrm{d}N^{(-)} &= \mathrm{d}N_2 f_1 \mathrm{d}\omega_1 \mathrm{d}\tau_1 && (17) \\
&= f_1 f_2 \Lambda \mathrm{d}\omega_1 \mathrm{d}\tau_1 \mathrm{d}\omega_2 \mathrm{d}\Omega \mathrm{d}t && (18)
\end{aligned}
$$

* 汪 (11.4.10)，林 (10.1.22)

元碰撞数

dt 内发生的总碰撞次数

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}N_2 &= f_2 \Lambda \mathrm{d}\omega_2 \mathrm{d}\Omega \mathrm{d}t && (16)\\
\mathrm{d}N^{(-)} &= \mathrm{d}N_2 f_1 \mathrm{d}\omega_1 \mathrm{d}\tau_1 && (17)\\
&= f_1 f_2 \Lambda \mathrm{d}\omega_1 \mathrm{d}\tau_1 \mathrm{d}\omega_2 \mathrm{d}\Omega \mathrm{d}t && (18)
\end{aligned}
$$

* 汪 (11.4.10)，林 (10.1.22)

分子混沌性假设

单粒子分布函数 f_1, f_2 可以简单相乘，即两分子的速度分布相互独立。

元反碰撞数

反碰撞与碰撞有着相同的物理规律。 ▸ 查看方程

类比

$$\mathrm{d}N^{(-)} = f_1 f_2 \Lambda \mathrm{d}\omega_1 \mathrm{d}\tau_1 \mathrm{d}\omega_2 \mathrm{d}\Omega \mathrm{d}t \tag{19}$$

$$\mathrm{d}N^{(+)} = f_1' f_2' \Lambda' \mathrm{d}\omega_1' \mathrm{d}\tau_1 \mathrm{d}\omega_2' \mathrm{d}\Omega' \mathrm{d}t \tag{20}$$

* 林 (10.1.24)，汪 (11.4.11)

元反碰撞数

反碰撞与碰撞有着相同的物理规律。 ▸ 查看方程

类比

$$\mathrm{d}N^{(-)} = f_1 f_2 \Lambda \mathrm{d}\omega_1 \mathrm{d}\tau_1 \mathrm{d}\omega_2 \mathrm{d}\Omega \mathrm{d}t \tag{19}$$

$$\mathrm{d}N^{(+)} = f_1' f_2' \Lambda' \mathrm{d}\omega_1' \mathrm{d}\tau_1 \mathrm{d}\omega_2' \mathrm{d}\Omega' \mathrm{d}t \tag{20}$$

* 林 (10.1.24)，汪 (11.4.11)

区别

$$f_1(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{v}_1, t),\ f_1'(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{v}_1', t),\ f_2,\ f_2' \tag{21}$$

$$\mathrm{d}\Omega' \qquad \Lambda' \qquad \mathrm{d}\omega_1' \mathrm{d}\omega_2' \tag{22}$$

代换联系

立体角微元相等

$$\boldsymbol{n}' = -\boldsymbol{n} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{d}\Omega' = \mathrm{d}\Omega \tag{23}$$

Λ 相等

$$\Lambda' = d_{12}^2 \left| \boldsymbol{v}_2' - \boldsymbol{v}_1' \right| \cos\theta' = d_{12}^2 (\boldsymbol{v}_2' - \boldsymbol{v}_1') \cdot \boldsymbol{n}' \tag{24}$$

$$= d_{12}^2 (\boldsymbol{v}_2 - \boldsymbol{v}_1) \cdot \boldsymbol{n} = \Lambda \tag{25}$$

▸ 相对速度

代换联系·雅克比

$$\mathrm{d}\omega_1'\mathrm{d}\omega_2' = |J|\,\mathrm{d}\omega_1\mathrm{d}\omega_2 \tag{26}$$

* 汪 (11.4.13)，林 (10.1.26)

$$J = \frac{\partial(\boldsymbol{v}_1', \boldsymbol{v}_2')}{\partial(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2)} \tag{27}$$

▸ 函数表达式

$$\mathrm{d}\omega_1'\mathrm{d}\omega_2' = |J|\,\mathrm{d}\omega_1\mathrm{d}\omega_2 \tag{26}$$

* 汪 (11.4.13)，林 (10.1.26)

$$J = \frac{\partial(\boldsymbol{v}_1', \boldsymbol{v}_2')}{\partial(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2)} \tag{27}$$

▸ 函数表达式

对称性

$$J^{-1} = \frac{\partial(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2)}{\partial \boldsymbol{v}_1', \boldsymbol{v}_2'} = J \qquad JJ^{-1} = J^2 = 1 \qquad |J| = 1 \tag{28}$$

* 林 (10.1.27-28)

碰撞项

▸ 回顾粒子数变化

$$\left(\frac{\partial f_1}{\partial t}\right)_c \mathrm{d}\tau_1 \mathrm{d}\omega_1 \mathrm{d}t = \iint (\mathrm{d}N^{(+)} - \mathrm{d}N^{(-)}) \tag{29}$$

$$= \left(\iint (f_1' f_2' - f_1 f_2) \mathrm{d}\omega_2 \Lambda \mathrm{d}\Omega\right) \mathrm{d}\tau_1 \mathrm{d}\omega_1 \mathrm{d}t \tag{30}$$

* 林 (10.1.30)

碰撞项

$$\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_c = \iint (f' f_1' - f f_1) \mathrm{d}\omega_1 \Lambda \mathrm{d}\Omega \tag{31}$$

* 林 (10.1.31)

玻尔兹曼积分微分方程

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \underbrace{\boldsymbol{v} \cdot \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{r}} + \boldsymbol{F} \cdot \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{v}}}_{\text{drift}} = \underbrace{\iint (f'f_1' - ff_1)\mathrm{d}\omega_1 \Lambda \mathrm{d}\Omega}_{\text{collision}} \tag{32}$$

* 汪 (11.4.16)，林 (10.1.32)

未知函数 f，$f_1 = f(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{v}_1, t), f' = f(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{v}', t), f_1' = f(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{v}_1', t)$

玻尔兹曼方程的适用条件

玻尔兹曼方程的适用条件

* 林 §10.1.5

假设

1. 经典稀薄气体，短程分子力；
2. 漂移项与碰撞项互不干扰；
3. 只考虑二体碰撞；
4. 忽略内部结构，使用刚球模型；
5. 引入混沌性假设，分布独立。

要求：气体稀薄，高温，非简并条件，短程力，不考虑分子内部结构等。

简例：麦克斯韦分布律

平衡态

* 王 §41
H 定理：

$$\frac{\partial f}{\partial t} = 0 \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_c = 0, \left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_d = 0 \tag{33}$$

平衡态

* 王 §41

H 定理:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = 0 \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_c = 0, \left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_d = 0 \tag{33}$$

稳定分布律

$$f_1 f_2 = f_1' f_2' \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_d = 0 \tag{34}$$

H 定理：这是唯一条件。

解方程

待解方程

$$\ln f_1' + \ln f_2' = \ln f_1 + \ln f_2 \tag{35}$$

解方程

待解方程

$$\ln f_1' + \ln f_2' = \ln f_1 + \ln f_2 \tag{35}$$

观察守恒方程

$$m_1 \boldsymbol{v}_1' + m_2 \boldsymbol{v}_2' = m_1 \boldsymbol{v}_1 + m_2 \boldsymbol{v}_2$$
$$\frac{1}{2} m_1 v_1'^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2'^2 = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2$$

特解

$$\ln f = 1,\ mu,\ mv,\ mw,\ \frac{1}{2}m(u^2+v^2+w^2) \tag{36}$$

分别对应分子数、动量和能量守恒。

特解

特解

$$\ln f = 1,\ mu,\ mv,\ mw,\ \frac{1}{2}m(u^2+v^2+w^2) \tag{36}$$

分别对应分子数、动量和能量守恒。

不能有更多的特解

否则，会出现新的守恒条件，限制方程；与碰撞方向 $\boldsymbol{n}$ 任意矛盾。

通解

$$\ln f = \alpha + m\beta \cdot \mathbf{v} + \gamma m \mathbf{v}^2 = \ln a + bm(\mathbf{v} - \mathbf{v}_0)^2 \tag{37}$$

$$f = a \mathrm{e}^{bm(\mathbf{v}-\mathbf{v}_0)^2} \tag{38}$$

麦克斯韦分布律

$$f = n \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} \exp\left\{ -\frac{m}{2kT} (\mathbf{v} - \mathbf{v}_0)^2 \right\} \tag{39}$$

引申：**BBGKY**

连续介质力学

中国科学院大学玉泉路校区，2019 春季
地点：人文楼，教一·1
第 3~4 讲

赵亚溥
中国科学院大学工程科学学院
中国科学院力学研究所

本讲大纲

博戈柳博夫级联 (Bogoliubov hierarchy): 动力学、动理学、流体力学三个标度
板书推导 BBGKY (Bogoliubov-Born-Green-Kirkwood-Yvon) 级联方程
这就让我们站在一个高的“山峰”上来观察和理解“连续介质假定”
上次课讲了学习理性力学还有可能获得菲尔兹奖，本次讲工程科学的领航

博戈柳博夫级联 (Bogoliubov Hierarchy)

非平衡统计力学 (Non-equilibrium Statistical Mechanics) 的发展始于 1872 年，也就是始于我们上节课所推导的玻尔兹曼方程，它是描述稀薄气体非平衡现象的重要方程. 玻尔兹曼时年 28岁.

我们在一年级的《力学》课上讲过，牛顿第二定律、拉格朗日方程、哈密顿方程、刘维尔方程、薛定谔方程等均具有时间反演不变性，也称为“微观可逆性原理”，见《力学讲义》第 225 页. 时间反演相当于速度方向的反转，即运动方向的反转，而不是时间倒流.

而 Boltzmann 方程破坏了时间反演不变性.

热力学第二定律告诉我们，不可逆性是宏观系统的基本性质，非平衡统计力学的主要目的与基础工作就是要从可逆性的微观运动规律导出不可逆的宏观运动规律，把一个**微观保守**系统的运动规律变为**宏观耗散**系统的规律.

博戈柳博夫级联 (Bogoliubov Hierarchy)

1946 年，博戈柳博夫提出关于空间、时间上大致有三种不同尺度的描述方法，又称为三种标度：(1) 微观描述或动力学标度；(2) 动理学描述或标度；(3) 流体力学描述或标度.

三个特征尺度: (1) 粒子间作用力程；(2) 粒子的平均自由程；(3) 密度等非均匀性的量程.

在**动力学标度 (微观标度)** 上：分布函数随时间有急剧的变化，系统需要有多粒子的分布函数来描述；

在**动理学标度**上，系统的分布函数迅速地开始“同步”化，这时多粒子分布函数可表示为单粒子分布函数的泛函，只用单粒子分布函数就能描述系统的行为；

在**流体力学标度** (事实上，就是连续介质力学标度) 上，则只需要分布函数的若干个矩即可描述.

博戈柳博夫级联 (Bogoliubov Hierarchy)

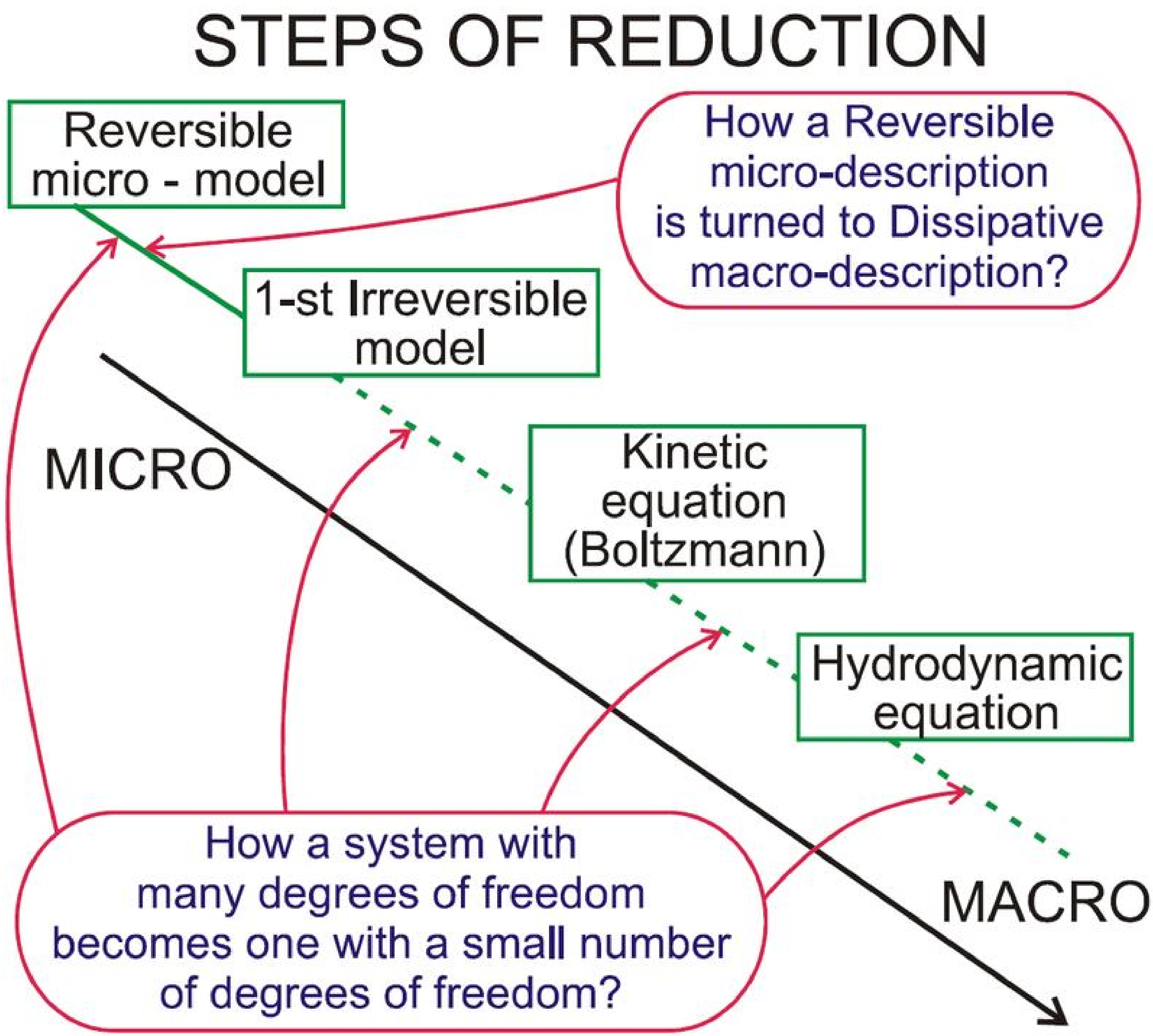
以常温、常压的氢气为例，说明博戈柳博夫的三个标度的划分.

一、微观 (动力学) 层次，特征尺度为粒子间的作用力程，可取为化学键键长的特征尺度 10^{-10} m (Å). 若气体分子热运动的特征速度为 10^{3} m/s，则该标度的特征时间大致为 10^{-13} s.

二、动理学层次，气体分子发生一到两次碰撞后进入到动理学描述阶段，特征尺度为粒子的平均自由程 (mean free path)，在 10^{-7} m 量级. 特征时间 (时标) 为两次碰撞之间自由飞行的时间，约为 10^{-10} s.

三、流体力学层次，当时标 $\gg 10^{-10}$ s，每个气体分子 (原子) 都已经过多次碰撞，它们之间已建立了新的局部平衡，进入到可进行宏观平均的流体力学阶段. 特征尺度为密度等非均匀性的量程，约为 10^{-2} m 量级.

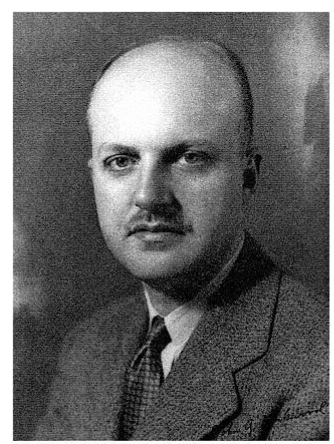
博戈柳博夫级联 (Bogoliubov Hierarchy)



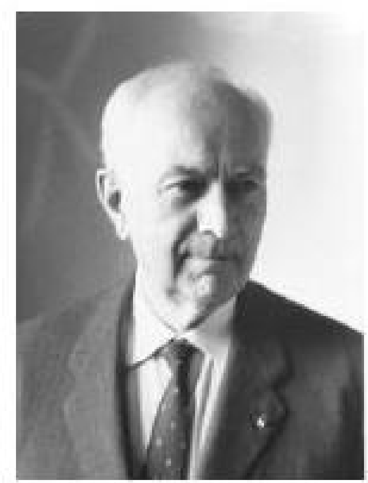
波尔兹曼方程在众多近似模型 (从微观动力学到宏观连续介质力学) 中所处的位置

BBGKY 级联 (BBGKY Hierarchy)

In statistical physics, the **BBGKY hierarchy** (**Bogoliubov–Born–Green–Kirkwood–Yvon hierarchy**, sometimes called **Bogoliubov hierarchy**) is a set of equations describing the dynamics of a system of a large number of interacting particles. The equation for an s-particle distribution function (probability density function) in the BBGKY hierarchy includes the $(s + 1)$-particle distribution function thus forming a coupled chain of equations. This formal theoretic result is named after Bogoliubov, Born, Green, Kirkwood, and Yvon.



John G. Kirkwood



Jacques Yvon, Cliché CEA

BBGKY 级联 (BBGKY Hierarchy)

经上节课的板书推导，一个没有涨落的由 N 个粒子组成的系统，其概率密度函数 (probability density function) $f_N(\boldsymbol{q}_1\cdots\boldsymbol{q}_N;\boldsymbol{p}_1\cdots\boldsymbol{p}_N;t)$ 满足：

$$\frac{\partial f_N}{\partial t}+\sum_{i=1}^{N}\frac{\boldsymbol{p}_i}{m}\cdot\frac{\partial f_N}{\partial \boldsymbol{q}_i}+\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{F}_i\cdot\frac{\partial f_N}{\partial \boldsymbol{p}_i}=0 \tag{1}$$

上式中，$\boldsymbol{q}_i$ 为广义坐标，$\boldsymbol{p}_i$ 为广义动量，作用在第 i 个质点上的力为

$$\boldsymbol{F}_i=-\sum_{j=1\neq i}^{N}\frac{\partial \Phi_{ij}}{\partial \boldsymbol{q}_i}-\frac{\partial \Phi_i^{ext}}{\partial \boldsymbol{q}_i} \tag{2}$$

其中，Φ_{ij} 为粒子间的对势（pair potential）,Φ_i^{ext} 为外场势（external field potential）

下面讨论 s-粒子和 $(s+1)$-粒子的级联。s-粒子的归一化条件为

$$\int_{positions}\int_{momenta}f_s(\boldsymbol{q}_1\cdots\boldsymbol{q}_s;\boldsymbol{p}_1\cdots\boldsymbol{p}_s;t)d^s\boldsymbol{q}d^s\boldsymbol{p}=1 \tag{3}$$

相应地，N-粒子的归一化条件为

$$\int_{positions}\int_{momenta}f_N(\boldsymbol{q}_1\cdots\boldsymbol{q}_N;\boldsymbol{p}_1\cdots\boldsymbol{p}_N;t)d^N\boldsymbol{q}d^N\boldsymbol{p}=1 \tag{4}$$

由上两式相等有：

$$\begin{aligned}
&\int f_s(\boldsymbol{q}_1\cdots\boldsymbol{q}_s;\boldsymbol{p}_1\cdots\boldsymbol{p}_s;t)\mathrm{d}\boldsymbol{q}_1\cdots\mathrm{d}\boldsymbol{q}_s\mathrm{d}\boldsymbol{p}_1\cdots\mathrm{d}\boldsymbol{p}_s\\
=&\int f_N(\boldsymbol{q}_1\cdots\boldsymbol{q}_N;\boldsymbol{p}_1\cdots\boldsymbol{p}_N;t)\mathrm{d}\boldsymbol{q}_1\cdots\mathrm{d}\boldsymbol{q}_N\mathrm{d}\boldsymbol{p}_1\cdots\mathrm{d}\boldsymbol{p}_N\\
=&\int f_N\mathrm{d}\boldsymbol{q}_1\cdots\mathrm{d}\boldsymbol{q}_s\mathrm{d}\boldsymbol{q}_{s+1}\cdots\mathrm{d}\boldsymbol{q}_N\mathrm{d}\boldsymbol{p}_1\cdots\mathrm{d}\boldsymbol{p}_s\mathrm{d}\boldsymbol{p}_{s+1}\cdots\mathrm{d}\boldsymbol{p}_N\\
=&\int f_N\mathrm{d}\boldsymbol{q}_{s+1}\cdots\mathrm{d}\boldsymbol{q}_N\mathrm{d}\boldsymbol{p}_{s+1}\cdots\mathrm{d}\boldsymbol{p}_N(\mathrm{d}\boldsymbol{q}_1\cdots\mathrm{d}\boldsymbol{q}_s\mathrm{d}\boldsymbol{p}_1\cdots\mathrm{d}\boldsymbol{p}_s)
\end{aligned} \tag{5}$$

由上式可得到 s-粒子和 N-粒子概率密度函数的级联关系：

$$f_s=\int f_N\mathrm{d}\boldsymbol{q}_{s+1}\cdots\mathrm{d}\boldsymbol{q}_N\mathrm{d}\boldsymbol{p}_{s+1}\cdots\mathrm{d}\boldsymbol{p}_N \tag{6}$$

上式中，令 $N=s+1$，则得到 s-粒子和 $(s+1)$-粒子间的递推关系：

$$f_s(\boldsymbol{q}_1\cdots\boldsymbol{q}_s,\boldsymbol{p}_1\cdots\boldsymbol{p}_s,t)=\int f_{s+1}(\boldsymbol{q}_1\cdots\boldsymbol{q}_{s+1},\boldsymbol{p}_1\cdots\boldsymbol{p}_{s+1},t)\mathrm{d}\boldsymbol{q}_{s+1}\boldsymbol{p}_{s+1} \tag{7}$$

在 N-particle 系统中，对 s-particle 中粒子作用的有 $s-$particle 中粒子间相互作用的对势，外场势，以及 $(N-s)$-particle 对粒子的对势，则力矢量为

$$\boldsymbol{F}_i=-\sum_{j=1\neq i}^{s}\frac{\partial\Phi_{ij}}{\partial\boldsymbol{q}_i}-\frac{\partial\Phi_i^{ext}}{\partial\boldsymbol{q}_i}-(N-s)\frac{\partial\Phi_{i\ s+1}}{\partial\boldsymbol{q}_i} \tag{8}$$

将 (8) 式代回 (1) 式：

$$\frac{\partial f_N}{\partial t}+\sum_{i=1}^{N}\frac{\boldsymbol{p}_i}{m}\cdot\frac{\partial f_N}{\partial \boldsymbol{q}_i}+\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{F}_i\cdot\frac{\partial f_N}{\partial \boldsymbol{p}_i}=0$$

得到：

$$\frac{\partial f_s}{\partial t}+\sum_{i=1}^{s}\frac{\boldsymbol{p}_i}{m}\frac{\partial f_s}{\partial \boldsymbol{q}_i}-\sum_{i=1}^{s}\left(\sum_{j=1\neq i}^{s}\frac{\partial \Phi_{ij}}{\partial \boldsymbol{q}_i}+\frac{\partial \Phi_i^{ext}}{\partial \boldsymbol{q}_i}\right)\frac{\partial f_s}{\partial \boldsymbol{p}_i}=(N-s)\sum_{i=1}^{s}\frac{\partial \Phi_{i\ s+1}}{\partial \boldsymbol{q}_i}\frac{\partial f_s}{\partial \boldsymbol{p}_i} \tag{9}$$

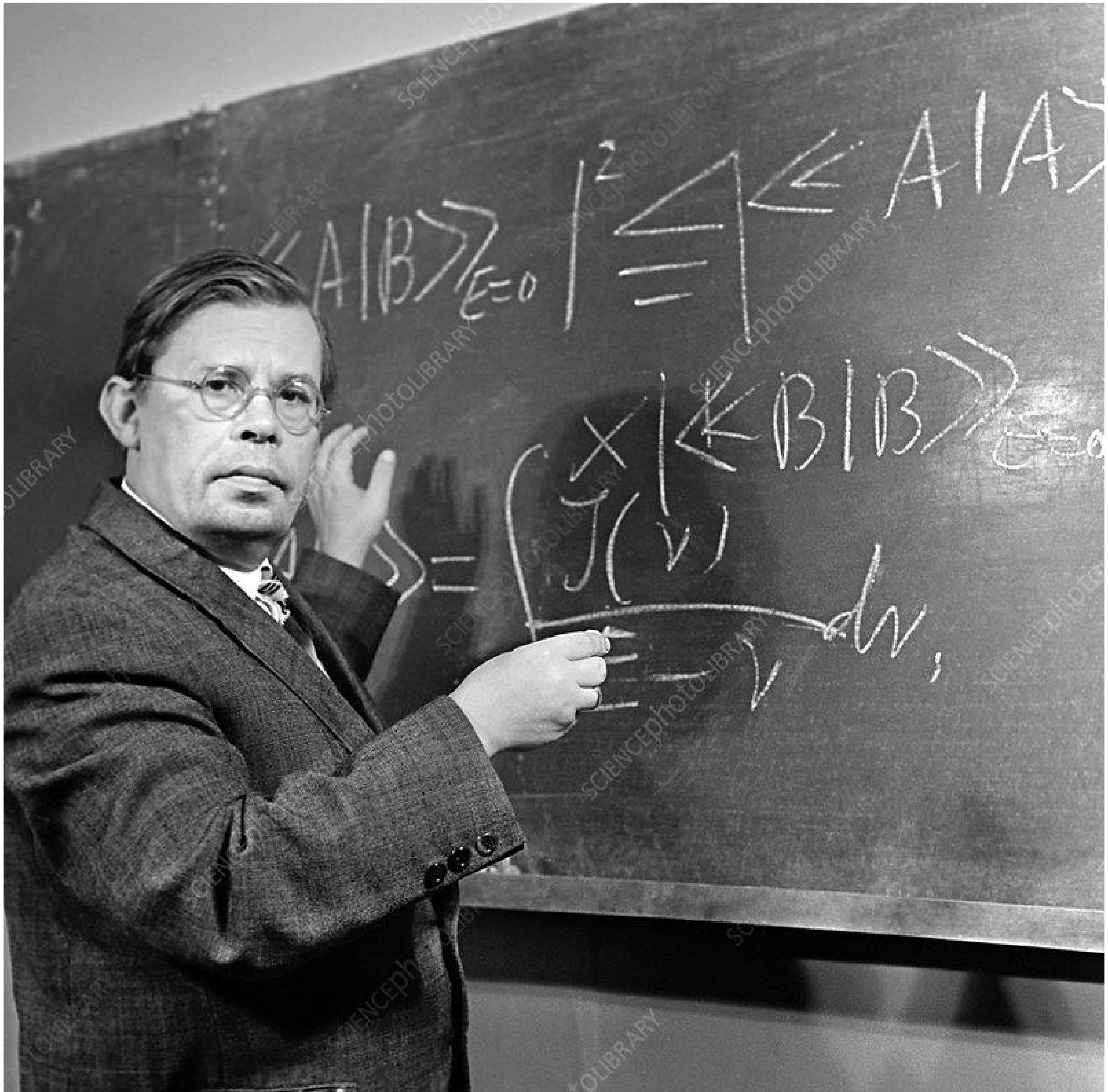
将（7）式，亦即 s 与 $s+1$ 间概率密度函数的递推关系：

$$f_s(\boldsymbol{q}_1\cdots\boldsymbol{q}_s,\boldsymbol{p}_1\cdots\boldsymbol{p}_s,t)=\int f_{s+1}(\boldsymbol{q}_1\cdots\boldsymbol{q}_{s+1},\boldsymbol{p}_1\cdots\boldsymbol{p}_{s+1},t)\mathrm{d}\boldsymbol{q}_{s+1}\boldsymbol{p}_{s+1}$$

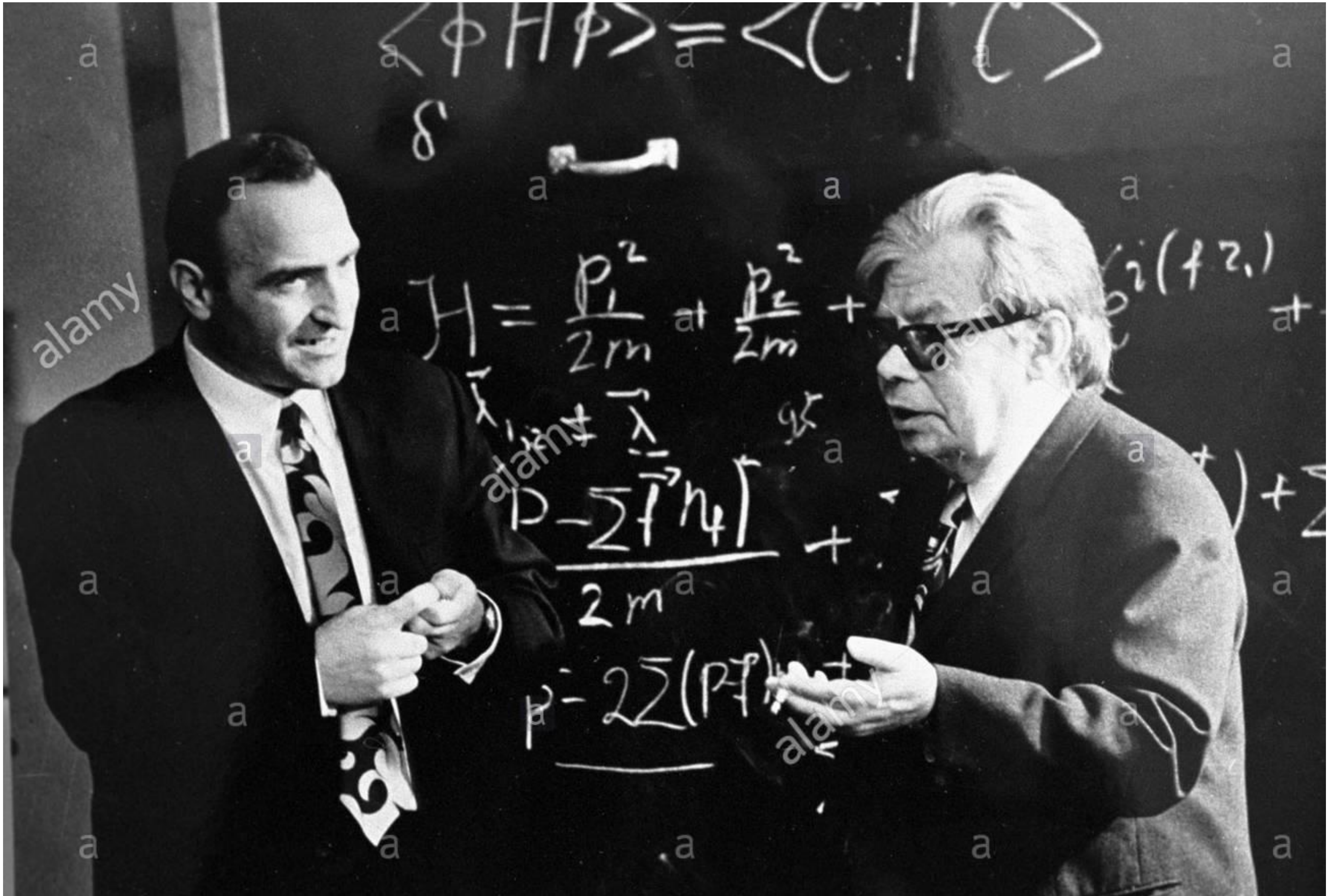
代入到（9）式，整理便得到 BBGKY 的级联方程：

$$\begin{aligned}\frac{\partial f_s}{\partial t}+\sum_{i=1}^{s}\frac{\boldsymbol{p}_i}{m}\cdot\frac{\partial f_s}{\partial \boldsymbol{q}_i}-\sum_{i=1}^{s}\left(\sum_{j=1\neq i}^{s}\frac{\partial \Phi_{ij}}{\partial \boldsymbol{q}_i}+\frac{\partial \Phi_i^{ext}}{\partial \boldsymbol{q}_i}\right)\cdot\frac{\partial f_s}{\partial \boldsymbol{p}_i}\\=(N-s)\sum_{i=1}^{s}\int\frac{\partial \Phi_{i\ s+1}}{\partial \boldsymbol{q}_i}\frac{\partial f_{s+1}}{\partial \boldsymbol{p}_i}\mathrm{d}\boldsymbol{q}_{s+1}\mathrm{d}\boldsymbol{p}_{s+1}\end{aligned} \tag{10}$$

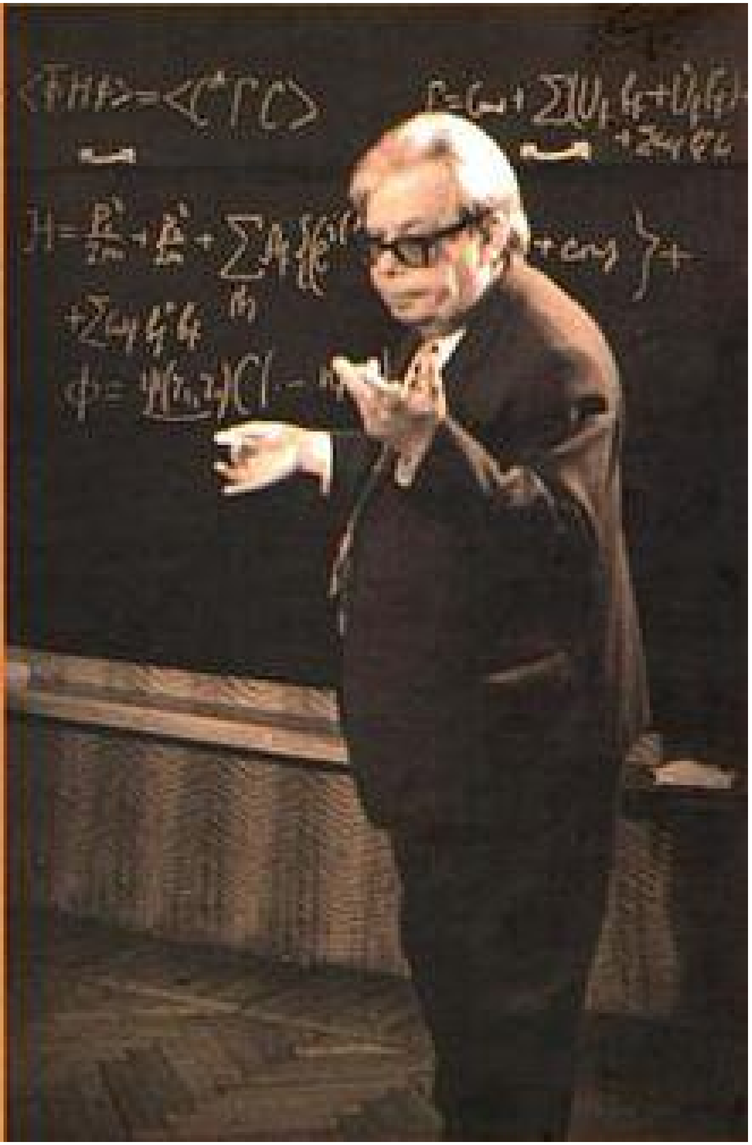
尼古拉·博戈柳博夫 (1909~1992)

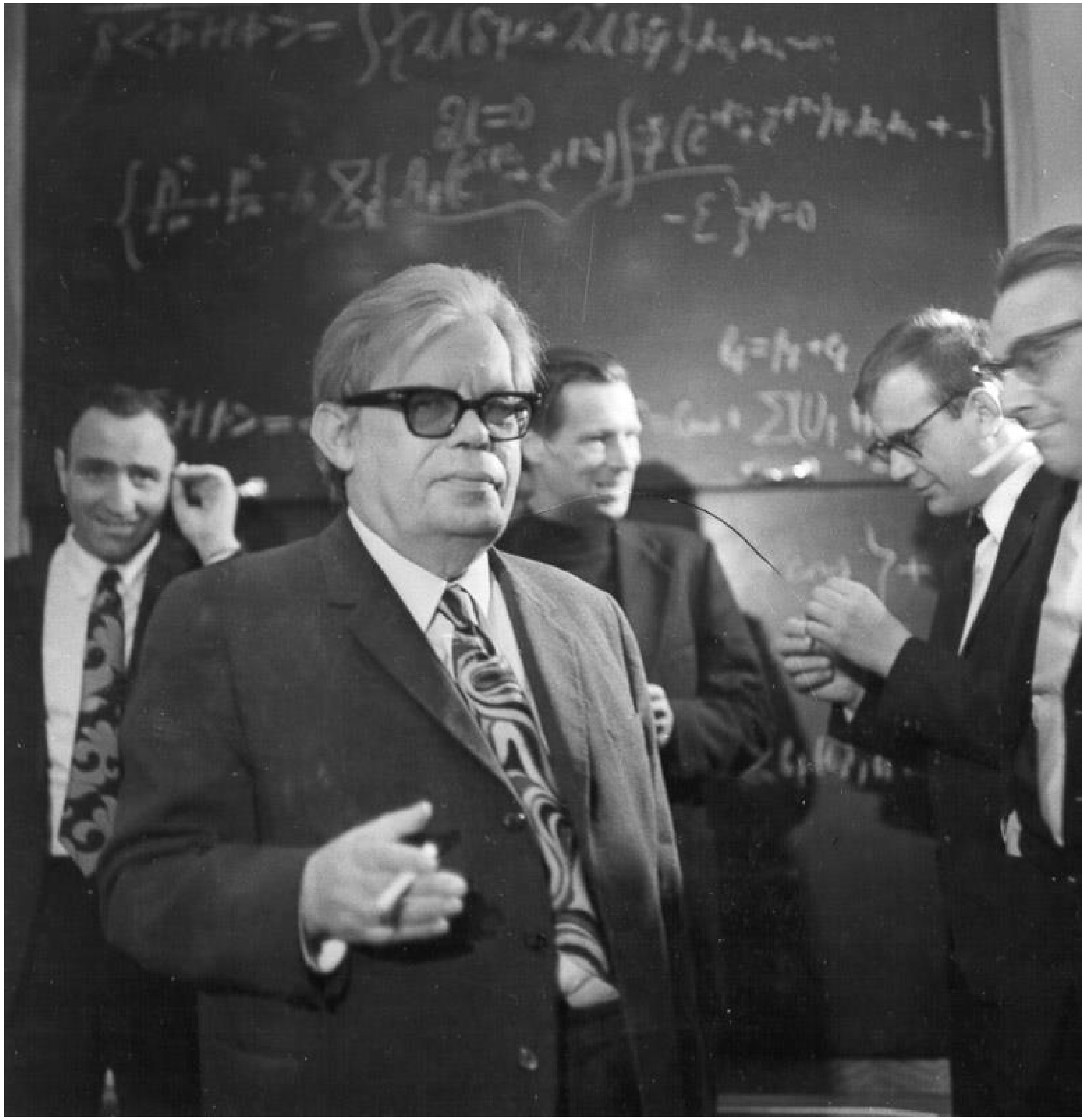


尼古拉·博戈柳博夫 (1909~1992)

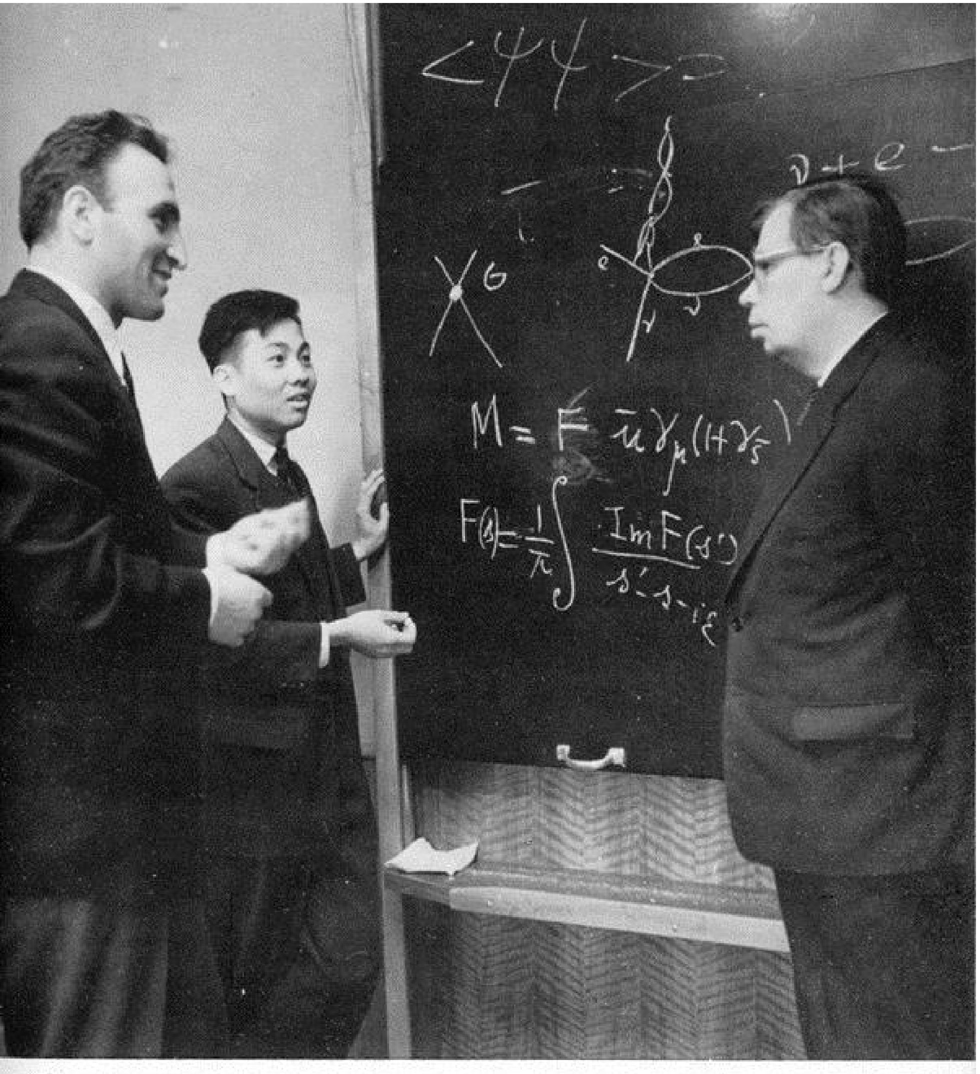


尼古拉·博戈柳博夫 (1909~1992)

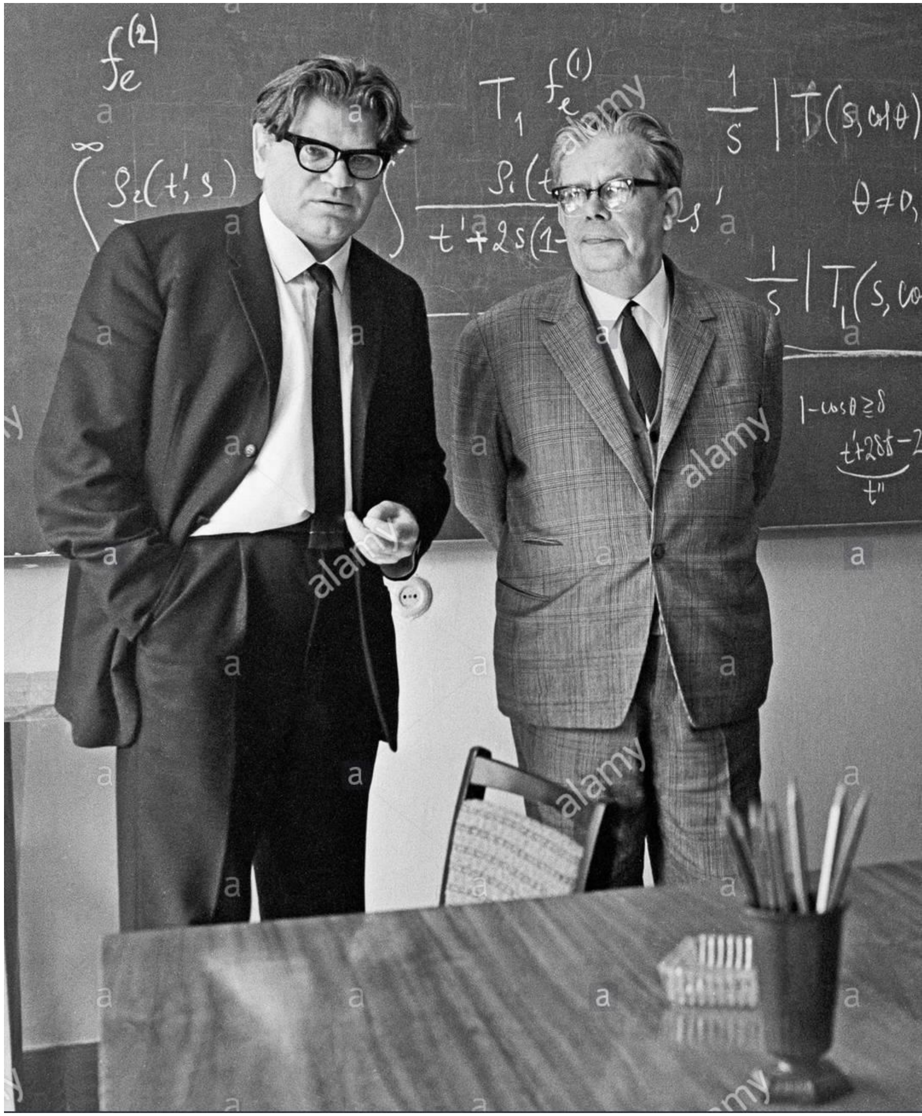




尼古拉·博戈柳博夫 (1909~1992)



А.Н.Тавхелидзе, Нгуен Ван Хьеу, Н.Н.Боголюбов. Дубна, 1962 г.



BBGKY 的解法

利用稀薄条件，级列终止于双粒子分布函数。当然也可进一步推导修正。

见朗道《物理动理学》§16

Thanks for **Listening**!