前言

正如你们在本页顶端所见，这本讲义是我大一下学期（2017-2018 春季学期）在中国科学院大学学习线性代数课程时整理的课堂讲义。根据我选择的班级，此门课程是由来自中科院数学与系统科学研究院的李子明研究员主讲。李老师讲课认真细致，在课后还会将手写的电子版课堂讲义上传以供大家复习使用。

不过，手写版的讲义使用起来或多或少有一些不便。而我恰好有些 Word 输入公式和排版的经验。有一次我为了防止在课上犯困，尝试着带上电脑，在课堂上将所讲的内容做成 Word 文档并导出成 PDF 格式，发现效果确实不错，不仅没有犯困，听课也更认真了。于是，接下来直到期末我便利用课上的时间将课堂内容录成初稿，课下再对着李老师上传的电子版讲义校对，同时修复了一些笔误，在步骤跳跃的地方补充了一些自己的理解。同时抽空将本学期之前的内容也文档化，并征得李老师同意，将初步成品放在公众号上与大家分享。在最后整理时，将出现的各定理等取了一句话描述的名字，并且在书末整理附上特殊符号表。这些确实是艰辛枯燥的工作，但作为一种复习的方式，坚持下来也还是有不少收获。

同时值得一提的是线性代数课程配有每周一节的习题课。习题课分两个班，由助教老师上课。我所上的习题课是由张秉宇老师主讲。张老师风趣幽默，数学功力深厚，讲评习题、整理知识点、拓展内容对于学习线性代数都十分有价值，并且也很贴心地每周上传手写的电子版习题课讲义。后来我认识到，习题课的内容也是线性代数课程不可或缺的一部分，习题的解答与拓展和课堂所学内容相辅相成。因此，虽然原先计划是课堂讲义，但我认为还是应当加入习题课的部分。于是，我在张老师的习题课讲义中选取了最有价值的一系列题目和知识点，将其文档化并附在正课讲义的后面。

将手写版讲义文档化之后，大约有以下几点好处：

1、支持搜索内容；

2、美观性、可读性加强；

3、消除了大部分电子讲义中的笔误；

4、占用的存储空间大大减小，翻阅也更方便；

当然，囿于本人时间精力和水平能力有限，也有以下一些不足与遗憾之处：

1、未能在目录及引用的各处添加超链接；

2、未能整理杜昊老师的习题课讲义；

3、由于时间较为仓促，可能有一些疏漏之处；

4、所取的定理等的名字可能有描述不到位的情况。

使用这本讲义的同学需要注意以下几点：

1、书中定理等的名字大部分是依我对这部分内容的理解而取而非李老师所取；

2、书中定理等的序号在尽量保持与原讲义相同的情况下作了调整以规范；

3、习题集选中题目的编号 A-B，A 为习题课的周次，注意与作业的次数区分，B 仅为一次习题课中内容的编号，与实际的讲课顺序、习题顺序均无关；

4、虽然目录没有超链接，但是我整理了 PDF 的书签（或在一些软件中称为大纲），可以通过这一功能或通过目录的页码来进行快速跳转。

最后，感谢李子明老师、张秉宇和杜昊两位助教老师一学期的辛勤付出，感谢所有为完成这本讲义整理集提供各方面帮助的热心同学们。

庄逸

2018 年 7 月 15 日

勘误

144 页 极小多项式 第四行

— 原为$F[\mathcal{A}]=\langle A^0,A^1,\ldots\rangle$　应为$F[\mathcal{A}]=\langle \mathcal{A}^0,\mathcal{A}^1,\ldots\rangle$

线性算子多项式和零化多项式编号均为定义 2.4.1，重复。

237 页 第二章总结 第七行

— 原为A可对角化$\Leftrightarrow d_1=\cdots=d_k$　应为A可对角化$\Leftrightarrow d_1=\cdots=d_k=1$

336 页 $15-6$ 中国剩余定理 第五行

— 原为令$M=p_1,\ldots,p_k$　应为令$M=p_1\cdots p_k$

目录

第二章——线性算子——125

完全版索引

【完全版索引目录】

第一章 空间与形式

§1 抽象向量空间

【定义 1.1.1】向量空间

设 $(F,+,0,\cdot,1)$ 是域

$$F^n=\left\{\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_n\end{pmatrix}\middle|\,\alpha_1,\dots,\alpha_n\in F\right\}$$

设 $\vec{u}=\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_n\end{pmatrix},\vec{v}=\begin{pmatrix}\beta_1\\ \vdots\\ \beta_n\end{pmatrix},\vec{u},\vec{v}\in F$

定义：$\vec{u}+\vec{v}=\begin{pmatrix}\alpha_1+\beta_1\\ \vdots\\ \alpha_n+\beta_n\end{pmatrix}$

设 $\lambda\in F,\lambda\vec{u}=\begin{pmatrix}\lambda\alpha_1\\ \vdots\\ \lambda\alpha_n\end{pmatrix}$

则 F^n 是域 F 上的 n 维线性空间

设 $(V,+,\vec{0})$是交换群，$(F,+,0,\cdot,1)$是域

定义数乘：$F\times V\to V,(\lambda,\vec{v})\mapsto\lambda\vec{v}$

满足以下性质：

$(i)\forall\alpha,\beta\in F,\vec{v}\in V,\alpha(\beta\vec{v})=(\alpha\beta)\vec{v}$ [结合律]

$(ii)\forall\vec{v}\in V,1\vec{v}=\vec{v}$

$(iii)\forall\alpha\in F,\vec{u},\vec{v}\in V,\alpha(\vec{u}+\vec{v})=\alpha\vec{u}+\alpha\vec{v}$

则称 V 是 F 上的向量空间（线性空间）

F是 V的基域

【例 1.1.1】平凡线性空间

平凡线性空间 $V=\{\vec{0}\}$

F是任何域 $\forall\alpha\in F,\alpha\vec{0}=\vec{0}$

【例 1.1.2】坐标空间

坐标空间 $V=F^n$

【例 1.1.3】矩阵空间

F上的矩阵：$F^{m\times n}$

矩阵加法，矩阵数乘

零向量是 $O_{m\times n}$

【例 1.1.4】多项式空间

$F[x]$ 是线性空间,$\forall f,g\in F[x]$

$f+g$ 是多项式相加，数乘为 $\alpha f,\alpha\in F$

【例 1.1.5】函数空间

设 S 是非空集合，F是域

$\mathrm{Func}(S,F)\coloneqq\{f|f:S\to F \text{ 映射}\}$

设 $f,g\in F$, 定义

$f+g:S\to F,\qquad s\mapsto f(s)+g(s)$

设 $\alpha\in F,\alpha f:S\to F,\qquad s\mapsto\alpha f(s)$

则 $f+g,\alpha f\in\mathrm{Func}(S,F)$

$0^*:S\to F,s\mapsto 0$

则$(\mathrm{Func}(S,F)\,,+,0^*)$是交换群

$\mathrm{Func}(S,F)$ 关于上述定义的数乘构成 F 上的线性空间

【例 1.1.6】F-代数空间

$F-$代数构成的线性空间

设 $(\mathbb{R},+,0,\cdot,1)$是环,F是 $\mathbb{R}$ 的子域

即 $F\subset\mathbb{R},(F,+,0,\cdot,1)$是域

$\forall a,b\in\mathbb{R},a+b$按环中加法

$\forall\alpha\in F,\alpha a$ 按环中乘法

则 $\mathbb{R}$ 是 F 上的线性空间

【例 1.1.7】F-代数空间例 1

$F[x],F[x_1,\dots,x_n]$

【例 1.1.8】F-代数空间例 2

$\mathbb{C}$ 是 $\mathbb{R}$ 上的线性空间, $\mathbb{C}$ 和 $\mathbb{R}$ 都是 $\mathbb{Q}$ 上的线性空间

【例 1.1.9】笛卡尔积

设 $\left(V,+,\overrightarrow{0_V},\cdot\right),\left(W,+,\overrightarrow{0_W},\cdot\right)$是两个域 F 上的线性空间

则 $V\times W=\left\{\begin{pmatrix}\vec{v}\\\vec{w}\end{pmatrix}\,\middle|\,\vec{v}\in V,\vec{w}\in W\right\}$

可以如下方式定义成F上的线性空间

设 $\overrightarrow{v_1},\overrightarrow{v_2}\in V,\overrightarrow{w_1},\overrightarrow{w_2}\in W$

$$\begin{pmatrix}\overrightarrow{v_1}\\\overrightarrow{w_1}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\overrightarrow{v_2}\\\overrightarrow{w_2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\overrightarrow{v_1}+\overrightarrow{v_2}\\\overrightarrow{w_1}+\overrightarrow{w_2}\end{pmatrix}$$

$\forall \alpha \in F, \alpha \begin{pmatrix} \overrightarrow{v_1} \\ \overrightarrow{w_1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha\overrightarrow{v_1} \\ \alpha\overrightarrow{w_1} \end{pmatrix}$

此时 $V \times W$ 中的零向量是 $\begin{pmatrix} \overrightarrow{0_V} \\ \overrightarrow{0_W} \end{pmatrix}$

【命题 1.1】向量空间基本性质

$(i) \forall \lambda \in F, \vec{v} \in V, \lambda\vec{v} = \vec{0} \Leftrightarrow \lambda = 0 \vee \vec{v} = \vec{0}$

$(ii) \forall \vec{v} \in V, (-1)\vec{v} = -\vec{v}$

证：$(i) \Leftarrow$: 先设 $\lambda = 0$, 在F中有

$1 + 0 = 1 \Rightarrow (1+0)\vec{v} = 1 \cdot \vec{v} \Rightarrow 1 \cdot \vec{v} + 0 \cdot \vec{v} = 1 \cdot \vec{v}$

$\Rightarrow 0 \cdot \vec{v} = \vec{0}$

再设 $\vec{v} = \vec{0}, \because\ \vec{0} + \vec{0} = \vec{0}$

$\therefore \lambda(\vec{0} + \vec{0}) = \lambda\vec{0} \quad \therefore \lambda\vec{0} + \lambda\vec{0} = \lambda\vec{0} \quad \therefore\ \lambda\vec{0} = \vec{0} \Rightarrow \lambda\vec{v} = \vec{0}$

$\Rightarrow$: 设$\lambda\vec{v} = \vec{0} \wedge \lambda \neq 0$

则 $\lambda^{-1}(\lambda\vec{v}) = \lambda^{-1}\vec{0} = \vec{0}$

$(\lambda^{-1}\lambda)\vec{v} = \vec{0}$

$1 \cdot \vec{v} = \vec{0} \Rightarrow \vec{v} = 0$

注：下面内容讲义中缺失，此处补证，仅供参考。

再设 $\lambda\vec{v} = \vec{0} \wedge\ \vec{v} \neq \vec{0}$

$\therefore \lambda\vec{v} + \lambda\vec{v} = 2\lambda\vec{v} = \vec{0} + \vec{0} = \vec{0}$

$\therefore 2\lambda\vec{v} = \lambda\vec{v} \quad \because \vec{v} \neq 0 \quad \therefore 2\lambda = \lambda \quad \therefore \lambda = 0$

(ii): 由 (i)得 $0 \cdot \vec{v} = \vec{0}$

$\because \vec{0} - \vec{v} = \vec{0} - \vec{v}$

$\therefore -\vec{v} = 0 \cdot \vec{v} - 1 \cdot \vec{v} = (0-1)\vec{v} = (-1)\vec{v} \quad \blacksquare$

【思考题】无法成为线性空间的整数环

$(\mathbb{Z},+,0)$不可能是任何域上的线性空间

反证法：假设 $\mathbb{Z}$ 是域 F 上的向量空间 $(F,+,\hat{0},\cdot,\hat{1})$

数乘 $F\times\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$

若 $\operatorname{char}F=p\neq 0$, 则

$\because \hat{1}\cdot 1=1$

$\therefore \underbrace{(\hat{1}+\hat{1}+\cdots+\hat{1})}_{p个}\cdot 1=\underbrace{\hat{1}\cdot 1+\cdots+\hat{1}\cdot 1}_{p个}$

而 $\underbrace{(\hat{1}+\hat{1}+\cdots+\hat{1})}_{p个}=0,\underbrace{\hat{1}\cdot 1+\cdots+\hat{1}\cdot 1}_{p个}=p$

$\therefore p=0$ 矛盾　$\therefore \operatorname{char}F=0$

设 $(\hat{1}+\hat{1})^{-1}\cdot 1=k\in\mathbb{Z}$

已知 $\left((\hat{1}+\hat{1})\cdot(\hat{1}+\hat{1})^{-1}\right)\cdot 1=(\hat{1}+\hat{1})\cdot k=\hat{1}\cdot k+\hat{1}\cdot k$

$=\underbrace{(\hat{1}\cdot 1+\hat{1}\cdot 1+\cdots+\hat{1}\cdot 1=1)}_{k个}\cdot 2=2k$

而 $\left((\hat{1}+\hat{1})\cdot(\hat{1}+\hat{1})^{-1}\right)\cdot 1=\ \hat{1}\cdot 1=1$

$\therefore 2k=1\Rightarrow k=\dfrac{1}{2}\notin\mathbb{Z}$ 矛盾

综上, $\mathbb{Z}$ 不是线性空间

§2 子空间

【定义 2.1.1】子空间

设V 是域 F 上的线性空间，定义 $W \subset V$

且 W 关于V中的加法和数乘也构成线性空间

则称 W是 V的子空间

【命题 2.1】子空间的充要条件

设$W \subset V$, 则W是V的子空间

$\Leftrightarrow \forall \alpha, \beta \in F, \vec{u}, \vec{v} \in W, \alpha\vec{u} + \beta\vec{v} \in W$

证： $\Rightarrow$ 显然

$\Leftarrow: \because \alpha\vec{u} + \beta\vec{v} \in W \quad \therefore \vec{u} + \vec{v} \in W, \alpha\vec{u} \in W$

于是W关于加法和数乘都封闭

由此可知W是V的子空间 ■

【例 2.1.1】平凡子空间

平凡子空间 $\{\vec{0}\}, V$

【例 2.1.2】坐标空间子空间

F^n 中的子空间举例

设 $A \in F^{m\times n}, \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

则 $A\vec{x} = \vec{0}$ 的解的集合是 F^n 中的子空间

【例 2.1.3】矩阵空间子空间

$F^{m\times n}$中的子空间举例

$(i)\ R=\left\{A\in F^{m\times n}\middle|\vec{A}^{(1)}=\overrightarrow{0_n}\right\}$

$(ii) n=m, M_n(F)$中所有对称矩阵的集合记为$SM_n(F)$,

$SM_n(F)$是子空间

验证:$\forall\alpha,\beta\in F,A,B\in SM_n(F)$

$(\alpha A+\beta B)^t=(\alpha A)^t+(\beta B)^t=\alpha A^t+\beta B^t=\alpha A+\beta B$

$\therefore\alpha A+\beta B\in SM_n(F)$

【例 2.1.4】多项式空间子空间

$F[x]$中子空间举例

设 $F_n[x]=\{f\in F[x]|\deg f<n\}$

$F_n[x]$是子空间

设 $p\in F[x]\setminus\{0\}$

$I_p=\{f\in F[x]\mid p|f\}$ 是子空间

验证:$\forall\alpha,\beta\in F,f,g\in I_p$

$\exists f_1,g_1\in F[x]$ 使得

$f=f_1p,\qquad g=g_1p$

$\alpha f+\beta g=\alpha f_1p+\beta g_1p=(\alpha f_1+\beta g_1)p$

$\Rightarrow p|\alpha f+\beta g\Rightarrow\alpha f+\beta g\in I_p\qquad\blacksquare$

【例 2.1.5】函数空间子空间

$C[a,b]=\left\{f(x)\middle|f:[a,b]\to\mathbb{R},\text{连续}\right\}$

$C[a,b]$是$\mathrm{Func}([a,b]\to\mathbb{R})$的子空间

【例 2.1.6】笛卡尔积子空间

设 V, W 是 F 上的线性子空间

$V_1 \subset V, W_1 \subset W$ 是子空间

则 $V_1 \times W_1$ 是 $V \times W$ 的子空间

【定义 2.1】子空间的和

设V_1, V_2是V的子空间

$V_1 + V_2 \coloneqq \{\overrightarrow{v_1} + \overrightarrow{v_2} | \overrightarrow{v_1} \in V_1, \overrightarrow{v_2} \in V_2\}$

称 $V_1 + V_2$ 是 V_1 与 V_2 的和

【命题 2.2】子空间的交与和

$(i)V$中任何多个子空间的交仍是子空间

$(ii)V$中有限多个子空间的和也是子空间

证：设I是一个下标集

$\forall i \in I, V_i$是 V 的子空间

设 $W = \bigcap\limits_{i \in I} V_i$

$\forall \alpha, \beta \in F, \vec{u}, \vec{v} \in W$ 则 $\vec{u}, \vec{v} \in V_i$

于是 $\alpha\vec{u} + \beta\vec{v} \in V_i \Rightarrow \alpha\vec{u} + \beta\vec{v} \in W$

由此可知 W是子空间

设$I = \{1,2,..,k\}$

$\forall \vec{u}, \vec{v} \in V_1 + V_2 + \cdots + V_k$

$\exists \overrightarrow{u_i} \in V_i, \overrightarrow{v_i} \in V_i, i = 1, \ldots, k$

使得 $\vec{u} = \overrightarrow{u_1} + \cdots + \overrightarrow{u_k}, \vec{v} = \overrightarrow{v_1} + \cdots + \overrightarrow{v_k}$

$\alpha\vec{u} + \beta\vec{v} = (\alpha\overrightarrow{u_1} + \beta\overrightarrow{v_1}) + \cdots + (\alpha\overrightarrow{u_k} + \beta\overrightarrow{v_k})$

$\because \forall i \in I, \overrightarrow{u_i} + \overrightarrow{v_i} \in V_i$

$\therefore \alpha\vec{u} + \beta\vec{v} \in V_1 + \cdots + V_k$ ■

【定义 2.2】线性组合

设 $\overrightarrow{v_1}, \dots, \overrightarrow{v_k} \in V, \alpha_1, \dots, \alpha_k \in F$

$\alpha_1\overrightarrow{v_1} + \cdots + \alpha_k\overrightarrow{v_k}$ 称为 $\overrightarrow{v_1}, \dots, \overrightarrow{v_k}$ 在 F 上的线性组合

设 $S \subset V$ 非空　记$\langle S \rangle$是S中元素所有可能的线性组合的集合

即$\langle S \rangle = \{\alpha_1\overrightarrow{v_1} + \cdots + \alpha_k\overrightarrow{v_k} | \forall k \in \mathbb{Z}^+, \overrightarrow{v_1}, \dots, \overrightarrow{v_k} \in S, \alpha_1, \dots, \alpha_k \in F\}$

称 $\langle S \rangle$为 S 在 F上生成的子空间

注: (i)验证$\langle S \rangle$的确是子空间，

见上学期讲义 2. 矩阵 → 线性相关性 $P13$

(ii)设U是包含S的子空间，则 $\langle S \rangle \subset U$

【例 2.1.7】生成多项式空间

$F[x] = \langle \{1, x, x^2, \dots\} \rangle = \langle 1, x, x^2, \dots \rangle$

§3 线性相关性

V 是 F上线性空间

【定义 3.1】线性相关 线性无关

设 $\overrightarrow{v_1},\ldots,\overrightarrow{v_k}\in V$, 如果存在 $\alpha_1,\ldots,\alpha_k\in F$不全为零

使得 $\alpha_1\overrightarrow{v_1}+\cdots+\alpha_k\overrightarrow{v_k}=\vec{0}$

则称 $\overrightarrow{v_1},\ldots,\overrightarrow{v_k}$ 线性相关

否则称 $\overrightarrow{v_1},\ldots,\overrightarrow{v_k}$线性无关

设 $S\subset V$非空　如果 S 中有一个非空有限子集

使得该子集中的元素线性相关

则称 S 线性相关，否则称 S 线性无关

【例 3.1.1】简单三角函数线性相关性

$\{1,\cos^2 x\}\subset C(-\infty,+\infty)$ 线性无关

$\alpha_1+\alpha_2\cos^2 x=0,$

令 $x=\dfrac{\pi}{2}\Rightarrow\alpha_1=0$

令 $x=0\Rightarrow\alpha_2=0$

$\{1,\cos^2 x,\sin^2 x\}$ 线性相关

$\cos^2 x+\sin^2 x-1=0$

【例 3.1.2】指数函数线性无关

$\{e^x,e^{2x},\ldots,e^{nx}\}\subset C(-\infty,+\infty)$线性无关

设 $\alpha_1,\dots,\alpha_n \in \mathbb{R}$ 使得

$\alpha_1 e^x + \alpha_2 e^{2x} + \cdots + \alpha_n e^{nx} = 0 \quad [*]$

对[*]不断求导，得到

$\alpha_1 e^x + 2\alpha_2 e^{2x} + \cdots + n\alpha_n e^{nx} = 0$

$\alpha_1 e^x + 2^2\alpha_2 e^{2x} + \cdots + n^2\alpha_n e^{nx} = 0$

$\cdots$

$\alpha_1 e^x + 2^{n-1}\alpha_2 e^{2x} + \cdots + n^{n-1}\alpha_n e^{nx} = 0$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & \cdots & n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1^{n-1} & 2^{n-1} & \cdots & n^{n-1} \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} \alpha_1 e^x \\ \alpha_2 e^{2x} \\ \vdots \\ \alpha_n e^{nx} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

由范德蒙德行列式可知 $|A| \neq 0$

$\Rightarrow \alpha_1 e^x = \alpha_2 e^{2x} = \cdots = \alpha_n e^{nx} = 0, \forall x \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0$

【定义 3.2】极大线性无关集

设 $S \subset V$,如果

$(i)S$ 线性无关

$(ii)\forall \vec{v} \in V \setminus S, S \cup \{\vec{v}\}$是线性相关,即 $\vec{v} \in \langle S \rangle$

则称 S是 V 中一个极大线性无关集

【引理 3.1】线性无关集可扩展为极大集

设 $S \subset V$ 是一个线性无关集，则 $\exists T \subset V$,使得

$(i)S \subset T \quad (ii)T$是极大线性无关集

证明需要超限归纳法.

【引理 3.2】线性空间中的引理 3.1

设 $m \in \mathbb{Z}^{+}$,V 中线性无关集至多含有 m个元素

设 S 是 V 中的线性无关集

则存在 V 中的极大线性无关集 T 包含 S

证：如果 S本身是极大线性无关集，则引理成立。

否则 $\exists \overrightarrow{v_1} \in V$,使得 $S_1 = S \cup \{\overrightarrow{v_1}\}$ 是线性无关集

如果 S_1 是极大线性无关集，则引理成立

否则 $\exists \overrightarrow{v_2} \in V$,使得 $S_2 = S \cup \{\overrightarrow{v_1}\} \cup \{\overrightarrow{v_2}\}$是线性无关集

注意到 $\operatorname{card} S < \operatorname{card} S_1 < \operatorname{card} S_2$

该步骤最多重复 $n - \operatorname{card} S$ 次

于是引理成立 ■

【引理 3.3】线性无关集中极大集基数最大

设 $S \subset V$ 是极大线性无关集

$T \subset V$是线性无关集

如果 $\operatorname{card} S < \infty$

则 $\operatorname{card} T \leq \operatorname{card} S$

证：设 $S = \{\overrightarrow{v_1}, \dots, \overrightarrow{v_k}\}, T = \{\overrightarrow{w_1}, \dots, \overrightarrow{w_l}\}$

假设 $l > k$

因为 S 是极大线性无关集

$\therefore \forall j \in \{1, \dots, l\}, \exists a_{1j}, \dots, a_{kj} \in F$

使得 $\overrightarrow{w_j} = a_{1j}\overrightarrow{v_1} + \cdots + a_{kj}\overrightarrow{v_k} = (\overrightarrow{v_1}, \dots, \overrightarrow{v_k})\begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{kj} \end{pmatrix}$

令 $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1l} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2l} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kl} \end{pmatrix}$ 则

$(\overrightarrow{w_1},\dots,\overrightarrow{w_l})=(\overrightarrow{v_1},\dots,\overrightarrow{v_k})A \quad [*]$

$\because l>k\ \exists\alpha_1,\dots,\alpha_l\in F$不全为零

使得$A\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_l\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}$

$\alpha_1\overrightarrow{w_1}+\cdots+\alpha_l\overrightarrow{w_l}=(\overrightarrow{w_1},..,\overrightarrow{w_l})\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_n\end{pmatrix}$

$=(\overrightarrow{v_1},\dots,\overrightarrow{v_k})A\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_n\end{pmatrix}=\vec{0}$ 矛盾

于是 $l\le k$ ■

【推论 3.1】极大线性无关集基数唯一

设 $S,T\subset V$ 是极大线性无关集，如果 S,T都是有限集，则

$\operatorname{card}S=\operatorname{card}T$

证：由引理 3.3 $\operatorname{card}S\ge\operatorname{card}T$

且 $\operatorname{card}T\ge\operatorname{card}S$

【定义 3.3】维数

设 $S\subset V$ 是极大线性无关集，如果 S 有限，

则 $\operatorname{card}S$ 称为 V在 F 上的维数

记为 $\dim_F V$ 或 $\dim V$

特别地 $\dim\{\vec{0}\}=0$

【例 3.1.3】多项式空间的维数

$\dim F_n[x] = n$

$\{1, x, \ldots, x^{n-1}\}$是极大线性无关组

注：若V没有有限的极大线性无关集，则

$\dim_F V \coloneqq \infty$

【定义 3.4】线性空间的基

设 $B \subset V$ 是线性无关集

如果$\forall \vec{v} \in V, \vec{v}$ 是 B中某些向量的线性组合

即 $V = \langle B \rangle$

则称 B 是 V 的一组基

注: (i) B是 V的一组基 $\Leftrightarrow$ B是极大线性无关集

(ii)任何线性空间都有基，当 $\dim V < \infty$, 这是引理 3.1 的直接推论

引理 3.1 还直接导致

【定理 3.1】基扩充定理

设 $\dim V < \infty, S \subset V$是线性无关集

则存在 V 的基底 B 使得 $S \subset B$

注：设 B 是 V 的一组基，则 $\dim V = \operatorname{card} B$

【例 3.1.4】复数和实数域的维数

$\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C} = 1, \{1, \sqrt{-1}\}$是 $\mathbb{C}$ 在 $\mathbb{R}$ 上的一组基

于是 $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = 2$

【例 3.1.5】实数域在有理域上无穷维

证明 $\dim_{\mathbb{Q}} \mathbb{R} = \infty$

由 $Eisenstein$ 判别法

$\forall n \in \mathbb{Z}^+, x^n - 2$ 在 $\mathbb{Q}_n$ 中不可约

设 $\theta_n = \sqrt[n]{2} \in \mathbb{R}$

$U = \langle \theta_n^0, \theta_n, \dots, \theta_n^{n-1} \rangle$

先证$\theta_n^0, \theta_n, \dots, \theta_n^{n-1}$ 在 $\mathbb{Q}$ 上线性无关

假设 $\exists \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{n-1} \in \mathbb{Q}$ 不全为零，使得

$\alpha_0 + \alpha_1 \theta_n + \cdots + \alpha_{n-1} \theta_n^{n-1} = 0$

令 $p(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \cdots + \alpha_{n-1} x^{n-1}$

则 $p \in \mathbb{Q}[x]$且 $p \neq 0$, 则 $p(\theta_n) = 0$

因为 $x^n - 2$ 不可约且$\deg p < n$

所以$\gcd(p, x^n - 2) = 1$

于是 $\exists u, v \in \mathbb{Q}[x]$

$u(x)p(x) + v(x)(x^n - 2) = 1$

代入 θ_n 得到 $0 = 1$　矛盾

由此可知 $1, \theta_n, \dots, \theta_n^{n-1}$ 在 $\mathbb{Q}$ 上线性无关

$\Rightarrow \dim_{\mathbb{Q}} U = n$

$\Rightarrow \dim_{\mathbb{Q}} \mathbb{R} \geq n, \forall n \in \mathbb{Z}^+$

$\Rightarrow \dim_{\mathbb{Q}} \mathbb{R} = \infty$　■

【命题 3.1】有限维子空间基本特征

设 $U_1, U_2 \subset V$ 是两个子空间，如果 $\dim U_2 < \infty$

如果 $U_1 \subset U_2$ 且 $\dim U_1 = \dim U_2$

则 $U_1 = U_2$

【命题 3.2】子空间交和维数公式

设 $U_1, U_2 \subset V$ 是有限维子空间

则 $\dim(U_1 + U_2) + \dim(U_1 \cap U_2) = \dim U_1 + \dim U_2$

§4 子空间的直和

设 $U_1,\dots,U_k\subset V$ 是子空间

【定义 4.1】子空间的直和

设 $U=U_1+\cdots+U_k$

如果 $\forall\vec{u}\in U,\exists!\,\overrightarrow{u_i}\in U_i,i=1,\dots,k$

使得 $\vec{u}=\overrightarrow{u_1}+\cdots+\overrightarrow{u_k}$

则称 U 是 $U_1,\dots,U_k$ 的直和

记为 $U=U_1\oplus\cdots\oplus U_k$

【命题 4.1】直和的性质

利用上述定义中的记号，则下列命题等价

$(i)U=U_1\oplus\cdots\oplus U_k$

$(ii)\forall\overrightarrow{u_1}\in U_1,\dots,\overrightarrow{u_k}\in U_k$

$\overrightarrow{u_1}+\cdots+\overrightarrow{u_k}=\vec{0}\Rightarrow\overrightarrow{u_1}=\cdots=\overrightarrow{u_k}=0$

$(iii)\forall i\in\{1,2,\dots,k\}$

$U_i\cap\{U_1+\cdots+U_{i-1}+U_{i+1}+\cdots+U_n\}=\{\vec{0}]$

证：$(i)\Rightarrow(ii)$

$\vec{0}=\vec{0}+\cdots+\vec{0}=\overrightarrow{u_1}+\cdots+\overrightarrow{u_k}$

$\vec{0},\overrightarrow{u_i}\in U_i\Rightarrow\overrightarrow{u_i}=\vec{0}$ [唯一性]

$(ii)\Rightarrow(iii)$

设 $\widehat{U_i}=U_1+\cdots+U_{i-1}+U_{i+1}+\cdots+U_k$

由下标的任意性，只要证 $U_1\cap\widehat{U_1}=\{\vec{0}\}$ 即可

设 $\vec{v}\in U_1\cap\widehat{U_1}$ 则存在 $\overrightarrow{u_2}\in U_2,\dots,\overrightarrow{u_k}\in U_k$

使得 $\vec{v}=\overrightarrow{u_2}+\cdots+\overrightarrow{u_k}$

即 $-\vec{v}+\overrightarrow{u_2}+\cdots+\overrightarrow{u_k}=\vec{0}$

$\because \vec{v}\in U_1 \quad \therefore \vec{v}=\vec{0}$

$(iii)\Rightarrow(i)$

设 $\vec{u}=\overrightarrow{u_1}+\cdots+\overrightarrow{u_k}=\overrightarrow{v_1}+\cdots+\overrightarrow{v_k}$

其中 $\overrightarrow{u_\iota},\overrightarrow{v_\iota}\in U_i, i=1,\dots,k$

则 $\vec{0}=(\overrightarrow{u_1}-\overrightarrow{v_1})+\cdots+(\overrightarrow{u_k}-\overrightarrow{v_k})$

$\overrightarrow{v_1}-\overrightarrow{u_1}=(\overrightarrow{u_2}-\overrightarrow{v_2})+\cdots+(\overrightarrow{u_k}-\overrightarrow{v_k})$

于是 $\overrightarrow{v_1}-\overrightarrow{u_1}\in U_1\cap\widehat{U_1}\Rightarrow\overrightarrow{v_1}=\overrightarrow{u_1}$

同理 $\overrightarrow{u_\iota}=\overrightarrow{v_\iota}, i=2,3,\dots,k$

注：如果 $U_1+\cdots+U_k$ 是直和

$\forall i_1,\dots,i_S\in\{1,\dots,k\}, i_1<\cdots<i_s$

则 $U_{i_1}+\cdots+U_{i_s}$也是直和 ■

【命题 4.2】直和维数相加

设 $U_1,\dots,U_k\subset V$ 是子空间

$\dim U_i<\infty, i=1,\dots,n.$ 令 $U=U_1+\cdots+U_k$

则 $U=U_1\oplus\cdots\oplus U_k\Leftrightarrow\dim U=\dim U_1+\cdots+\dim U_k$

证：对 k归纳

$\Rightarrow$ 当 $k=1$ 时 命题显然成立

设 $k-1$ 时命题成立 当 k时

$\dim U=\dim U_1+\dim\widehat{U_1}\quad\left[\widehat{U_1}=U_2+\cdots+U_k\right]$

$\left[\text{维数公式且 } U_1\cap\widehat{U_1}=\{\vec{0}\}\right]$

$\Leftarrow$ 对 $\widehat{U_1}$用归纳假设

$$\sum_{i=1}^{k}\dim U_i=\dim U=\dim U_1+\dim\widehat{U_1}-\dim\left(U_1\cap\widehat{U_1}\right)$$

$\le\dim U_1+\dim\widehat{U_1}\le\dim U_1+\cdots+\dim U_k$

$\therefore\dim\left(U_1\cap\widehat{U_1}\right)=0\Rightarrow U_1\cap\widehat{U_1}=\left\{\vec{0}\right\}$

同理 $\dim\left(U_i\cap\widehat{U_i}\right)=0$, 因而 $U=U_1\oplus\cdots\oplus U_k$ ■

【例 4.1.1】直和补存在性

设 $\dim V=n, U$ 是 V 的子空间

则存在 V 的子空间 W, 使得 $V=U\oplus W$

证：如果 $U=\left\{\vec{0}\right\}$, 令 $W=V$ 则 $V=U+W$

因为 $U\cap W=\left\{\vec{0}\right\}$ 由命题 4.1 $V=U\oplus W$

如果 $U=V$ 取 $W=\left\{\vec{0}\right\}$ 同理

设 $0<\dim U<n$, $\overrightarrow{u_1}$, ... , $\overrightarrow{u_d}$ 是 U 的一组基

由基扩充定理, $\exists\overrightarrow{w_{d+1}},\dots,\overrightarrow{w_n}$ 使得

$\overrightarrow{u_1},\dots,\overrightarrow{u_d},\overrightarrow{w_{d+1}},\dots,\overrightarrow{w_n}$ 是 V 的一组基

令 $W=\langle\overrightarrow{w_{d+1}},\dots,\overrightarrow{w_k}\rangle$

则 $\forall\vec{v}\in V\ \exists\alpha_1,\dots,\alpha_d,\beta_{d+1},\dots,\beta_n\in F$

使得 $\vec{v}=\underbrace{\alpha_1\overrightarrow{u_1}+\cdots+\alpha_d\overrightarrow{u_d}}_{\vec{u}}+\underbrace{\beta_{d+1}\overrightarrow{w_{d+1}}+\cdots+\beta_n\overrightarrow{w_n}}_{\vec{w}}$

$\vec{u}\in U,\vec{w}\in W\Rightarrow\vec{v}=\vec{u}+\vec{w}\Rightarrow V=U+W$

$\dim U=\dim W=d+n-d=n=\dim V$

由命题 4.2 $V=U\oplus W$ ■

注：称 W 是 U 的一个直和补

由于 U 的基底的选取和扩充不唯一, U 的直和补也**不唯一**

【例 4.1.2】构造直和补例

设 $U = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$ 构造 U 关于 $\mathbb{R}^2$的两个直和补

$\mathbb{R}^2 = U \oplus \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = U \oplus \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$

【例 4.1.3】奇偶函数空间直和

设 $V = \text{Func}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$

$\tilde{E} = \left\{ f \in V \middle| f\text{是偶函数} \right\}$

$\tilde{O} = \left\{ f \in V \middle| f\text{是奇函数} \right\}$

证：$\tilde{E}, \tilde{O}$ 是 V的子空间且 $V = \tilde{E} \oplus \tilde{O}$

$\forall f, g \in \tilde{O}, \alpha, \beta \in \mathbb{R}\ \forall x \in \mathbb{R}$

$(\alpha f + \beta g)(-x) = \alpha f(-x) + \beta g(-x)$

$= -\alpha f(x) - \beta g(x) = -(\alpha f + \beta g)(x)$

于是 $\tilde{O}$ 是子空间，同理 $\tilde{E}$ 是子空间

$\forall f \in V$

$$f(x) = \underbrace{\frac{1}{2}\big(f(x) + f(-x)\big)}_{\in \tilde{E}} + \underbrace{\frac{1}{2}\big(f(x) - f(-x)\big)}_{\in \tilde{O}}$$

$\Rightarrow V = \tilde{E} + \tilde{O}$

取 $f = \tilde{E} \cap \tilde{O}, \qquad f(x) = f(-x) \wedge f(x) = -f(-x)$

$\Rightarrow f(x) = -f(x) \Rightarrow 2f(x) = 0 \Rightarrow f(x) = 0$

$\Rightarrow \tilde{E} \cap \tilde{O} = \{0\}$

$\Rightarrow V = \tilde{E} \oplus \tilde{O} \qquad \blacksquare$

【例 4.1.4】常值与奇偶函数空间直和

设 $\tilde{C}=\{f_c \in V|\forall x \in \mathbb{R}, f(x)=c, c \in \mathbb{R}\}$

$\tilde{C}$是 $\mathbb{R}$ 上常值函数的集合

$\widetilde{E_0}=\{f \in \tilde{E}\big|f(0)=0\}$

证明：$\tilde{E}=\tilde{C} \oplus \widetilde{E_0}$ 从而 $V=\tilde{C} \oplus \widetilde{E_0} \oplus \tilde{O}$

证：$\tilde{C} \subset \tilde{E}$ 可直接验证 $\tilde{C}, \widetilde{E_0}$ 是子空间

设 $f \in E, f(0)=c$ 则

$f=c+(f-c), \qquad c \in \tilde{C}, f-c \in \widetilde{E_0}$

于是 $\tilde{E}=\tilde{C}+\widetilde{E_0}$

设 $g \in \tilde{C} \cap \widetilde{E_0}$, 则 $g(0)=0 \Rightarrow \forall x \in \mathbb{R}, g(x)=0\ [\because g \in \tilde{C}]$

$\Rightarrow g=0 \Rightarrow \tilde{E}=\tilde{C} \oplus \widetilde{E_0}$

$\Rightarrow V=\left(\tilde{C} \oplus \widetilde{E_0}\right) \oplus \tilde{O}$

$\Rightarrow V=\tilde{C} \oplus \widetilde{E_0} \oplus \tilde{O}$ ■

【例 4.1.5】前两例矩阵版

上述两个例子的矩阵版

设 $V=M_n(\mathbb{R})$是 n 阶实方阵的线性空间

$\tilde{E}=\{A \in V|A^t=A\}$

$\tilde{O}=\{A \in V|A^t=-A\}$

则 $V=\tilde{E} \oplus \tilde{O}$

令：$\widetilde{D}=\{A \in V\big|A \text{ 对角阵}\}$

$E_0=\{A \in \tilde{E}\big|A\text{对角线元素都为零的矩阵}\}$

则 $V=\tilde{E} \oplus \tilde{O}$ 且 $\tilde{E}=\widetilde{D} \oplus \widetilde{E_0}$

令 M_{ij}为在 i行j列处为 1，其他处都是 0 的 n 阶方阵, $i, j \in\{1, \ldots, n\}$

则 $B=\left\{M_{ij}\middle|i,j\in\{1,\dots,n\}\right\}$ 是线性无关集

$\forall A=\left(a_{ij}\right)_{n\times n}\quad A=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}M_{ij}$

$\therefore V=\langle B\rangle\Rightarrow\dim V=n^2$

$\widetilde{D}=\langle M_{11},\dots,M_{nn}\rangle\Rightarrow\dim\widetilde{D}=n$

$\widetilde{O}=\left\langle\left\{M_{ij}-M_{ji}\middle|1\le i<j<n\right\}\right\rangle$

$\widetilde{E_0}=\left\langle\left\{M_{ij}+M_{ji}\middle|1\le i<j<n\right\}\right\rangle$

$\left\{M_{ij}-M_{ji}\middle|1\le i<j<n\right\}$ 和 $\left\{M_{ij}+M_{ji}\middle|1\le i<j<n\right\}$

是线性无关集

$\dim\widetilde{O}=\dim\widetilde{E_0}=\dfrac{n(n-1)}{2}$

$\dim\widetilde{D}+\dim\widetilde{O}+\dim\widetilde{E_0}=n+\dfrac{n(n-1)}{2}+\dfrac{n(n-1)}{2}=n^2=\dim V$

$\Rightarrow V=\underbrace{\widetilde{D}\oplus\widetilde{E_0}}_{\widetilde{E}}\oplus\widetilde{O}$ ■

§5 商空间

【定义 5.1.1】空间等价关系

设 $U \subset V$ 是子空间

在 V 中定义二元关系 $\sim_U$ 如下：

$\forall \overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2} \in V, \quad \overrightarrow{v_1} \sim_U \overrightarrow{v_2}$ 如果 $\overrightarrow{v_1} - \overrightarrow{v_2} \in U$

验证 $\sim_U$ 是等价关系

设 $\vec{v} \in V, \vec{v} - \vec{v} = \vec{0} \in U \Rightarrow \vec{v} \sim_U \vec{v}$ ［自反］

设 $\overrightarrow{v_1} \sim_U \overrightarrow{v_2}, \quad \overrightarrow{v_1} - \overrightarrow{v_2} \in U \Rightarrow \overrightarrow{v_2} - \overrightarrow{v_1} \in U$

$\Rightarrow \overrightarrow{v_2} \sim_U \overrightarrow{v_1}$ ［对称］

设 $\overrightarrow{v_1} \sim_U \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_2} \sim_U \overrightarrow{v_3} \Rightarrow \overrightarrow{v_1} - \overrightarrow{v_2} \in U, \overrightarrow{v_2} - \overrightarrow{v_3} \in U$

$\Rightarrow (\overrightarrow{v_1} - \overrightarrow{v_2}) + (\overrightarrow{v_2} - \overrightarrow{v_3}) \in U \Rightarrow \overrightarrow{v_1} - \overrightarrow{v_3} \in U$

$\Rightarrow \overrightarrow{v_1} \sim_U \overrightarrow{v_3}$ ［传递］

称 $\sim_U$ 是 V 上关于 U 的等价关系

【引理 5.1】等价类

设 $\vec{v} \in V$, 则 $\vec{v}$ 关于 $\sim_U$ 的等价类是 $\vec{v} + U = \{\vec{v} + \vec{u} | \vec{u} \in U\}$

证：$\forall \vec{w} \in \vec{v} + U, \exists \vec{u} \in U$, 使得 $\vec{w} = \vec{v} + \vec{u}$

$\Rightarrow \vec{w} - \vec{v} = \vec{u} \in U \Rightarrow \vec{w} \sim_U \vec{v}$

设 $\vec{w} \sim_U \vec{v}$ 则 $\vec{w} - \vec{v} \in U$

$\Rightarrow \exists \vec{u} \in U, \vec{w} - \vec{v} = \vec{u} \Rightarrow \vec{w} = \vec{v} + \vec{u}$

$\Rightarrow \vec{w} \in \vec{v} + U \qquad \blacksquare$

由此可知 $V/_{\sim_U} = \{\vec{v} + U | \vec{v} \in V\}$

注：$\vec{v} + U = \vec{w} + U \Leftrightarrow \vec{v} \sim_U \vec{w} \Leftrightarrow \vec{v} - \vec{w} \in U$

【定义 5.1.2】商空间

记 $V/_{\sim_U}$ 为 $V/_U$,我们将在 $V/_U$ 中定义加法，$F\times V/_U$ 中定义数乘

使得 $V/_U$ 是 F 上的线性空间

$+$：$V/_U\times V/_U\to V/_U$， $(\overrightarrow{v_1}+U,\overrightarrow{v_2}+U)\mapsto(\overrightarrow{v_1}+\overrightarrow{v_2})+U$

验证良定义：

设 $\overrightarrow{v_1}+U=\overrightarrow{w_1}+U,\overrightarrow{v_2}+U=\overrightarrow{w_2}+U$

$\overrightarrow{v_1}-\overrightarrow{w_1}=\overrightarrow{u_1}\in U,\overrightarrow{v_2}-\overrightarrow{w_2}=\overrightarrow{u_2}\in U$

$(\overrightarrow{v_1}+\overrightarrow{v_2})-(\overrightarrow{w_1}+\overrightarrow{w_2})\in U$

$\Rightarrow(\overrightarrow{v_1}+\overrightarrow{v_2})+U=(\overrightarrow{w_1}+\overrightarrow{w_2})+U$ [见上注]

交换律，结合律由 $(V,+,0)$ 中的规律自然导出

$(\vec{v}+U)+(\vec{0}+U)=(\vec{v}+\vec{0})+U=\vec{v}+U$

$(\vec{v}+U)+(-\vec{v}+U)=(\vec{v}-\vec{v})+U=\vec{0}+U$

于是 $(V/_U,+,\vec{0}+U)$是交换群

数乘：$F\times V/_U\to V/_U$， $(\lambda,\vec{v}+U)\to(\lambda\vec{v}+U)$

验证良定义：设 $\vec{v}+U=\vec{w}+U$

则 $\vec{v}-\vec{w}\in U\Rightarrow\lambda(\vec{v}-\vec{w})\in U\Rightarrow\lambda\vec{v}-\lambda\vec{w}\in U$

$\Rightarrow\lambda\vec{v}+U=\lambda\vec{w}+U$

结合律和酉性自然满足，验证分配律

设 $\alpha,\beta\in F,(\alpha+\beta)(\vec{v}+U)=(\alpha+\beta)\vec{v}+U$

$=(\alpha\vec{v}+\beta\vec{v})+U=(\alpha\vec{v}+U)+(\beta\vec{v}+U)$

称 $(V/_U,+,\vec{0}+U,数乘)$ 是 V关于子空间 U的商空间

【例 5.1.1】商空间例

设 $V=\mathbb{R}^2, U=\left\langle\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right\rangle$

$V/_U=\{\vec{v}+U|\vec{v}\in V\}$

$\vec{v}+U=\left\{\begin{pmatrix}v_1\\v_2\end{pmatrix}+\alpha\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\middle|\alpha\in\mathbb{R}\right\}$

$=\left\{\begin{pmatrix}v_1\\v_2\end{pmatrix}-\left(\begin{pmatrix}v_2\\v_2\end{pmatrix}+U\right)\middle|v_1\,,v_2\in\mathbb{R}\right\}$

$=\left\{\begin{pmatrix}v_1-v_2\\0\end{pmatrix}+U\middle|v_1,v_2\in\mathbb{R}\right\}$

$=\left\{\begin{pmatrix}\alpha\\0\end{pmatrix}+U\middle|\alpha\in\mathbb{R}\right\}$

【例 5.1.2】复数商实数空间

$V=\mathbb{C}$ 看作 $\mathbb{R}$ 的线性空间

$V/_{\mathbb{R}}=\left\{\left(a+b\sqrt{-1}\right)+\mathbb{R}\middle|a,b\in\mathbb{R}\right\}$

$=\left\{b\sqrt{-1}+\mathbb{R}\middle|b\in\mathbb{R}\right\}$

【例 5.1.3】多项式商空间

设 $V=F[x]\quad U=F_2[x]=\{f\in F[x]|\deg f<2\}$

$V/_U=\left\{\sum_{i=0}^{d}f_ix^i+F_2[x]\,\middle|\,f_0,\dots,f_d\in F\right\}$

$=\left\{\sum_{i=2}^{d}f_ix^i+F_2[x]\,\middle|\,f_2,\dots,f_d\in F\right\}$

【例 5.1.4】多项式商空间 2

设 $V=F[x], U=\{f\in F[x]\,|\,x^2|f\}$

$$V/_U=\left\{\sum_{i=0}^{d} f_i x^i+U\,\middle|\,f_0,\dots,f_d\in F\right\}=\{(f_0+f_1x)+U\,|\,f_0,f_1\in F\}$$

$=\langle 1+U, x+U\rangle$

【命题 5.1】商空间维数公式

设 $\dim V=n<\infty, U\subset V$ 是子空间

则 $\dim V/_U=\dim V-\dim U$

证：设 $\dim U=d$

$\overrightarrow{u_1},\dots,\overrightarrow{u_d}$ 是 U 的一组基，

把它扩充为 V的一组基 $\overrightarrow{u_1},\dots,\overrightarrow{u_d},\overrightarrow{u_{d+1}},\dots,\overrightarrow{u_n}$

下证：$\overrightarrow{u_{d+1}}+U,\dots,\overrightarrow{u_n}+U$ 是 V/U 的一组基

$\forall\vec{v}\in V,\exists\alpha_1,\dots,\alpha_d,\alpha_{d+1},\dots,\alpha_n\in F,$

使得 $\vec{v}=\underbrace{\alpha_1\overrightarrow{u_1}+\cdots+\alpha_d\overrightarrow{u_d}}_{\vec{u}}+\underbrace{\alpha_{d+1}\overrightarrow{u_{d+1}}+\cdots+\alpha_n\overrightarrow{u_n}}_{\vec{w}}$

$\vec{v}-\vec{w}=\vec{u}\in U\Rightarrow\vec{v}+U=\vec{w}+U$

$\Rightarrow\vec{v}+U=\alpha_{d+1}\overrightarrow{u_{d+1}}+\cdots+\alpha_n\overrightarrow{u_n}+U$

$=\alpha_{d+1}(\overrightarrow{u_{d+1}}+U)+\cdots+\alpha_n(\overrightarrow{u_n}+U)$

即$V/_U=\langle\overrightarrow{u_{d+1}}+U,\dots,\overrightarrow{u_n}+U\rangle$

设 $\beta_{d+1},\dots,\beta_n\in F$ 使得

$\beta_{d+1}(\overrightarrow{u_{d+1}}+U)+\cdots+\beta_n(\overrightarrow{u_n}+U)=\vec{0}+U$

$\Rightarrow\beta_{d+1}\overrightarrow{u_{d+1}}+\cdots+\beta_n\overrightarrow{u_n}\in U$

$\Rightarrow\exists\beta_1,\dots,\beta_d\in F$ 使得

$\beta_{d+1}\overrightarrow{u_{d+1}}+\cdots+\beta_n\overrightarrow{u_n}=\beta_1\overrightarrow{u_1}+\cdots+\beta_d\overrightarrow{u_d}$

$\Rightarrow (-\beta_1)\overrightarrow{u_1} + \cdots + (-\beta_d)\overrightarrow{u_d} + \beta_{d+1}\overrightarrow{u_{d+1}} + \cdots + \beta_n\overrightarrow{u_n} = \vec{0}$

$\Rightarrow \beta_{d+1} = \cdots = \beta_n = 0$ ■

【推论 5.1】子空间满维数还原定理

设$U \subset V$ 是子空间

如果 $\dim U < \infty$ 且 $\dim U = \dim V$，则$U = V$

证：$\dim V/_U = \dim V - \dim U = 0$ [命题 5.1]

于是 $V/_U = \{\vec{0} + U\}$

$\forall \vec{v} \in V, \vec{v} \in \vec{0} + U \Rightarrow \vec{v} - \vec{0} \in U$

$\Rightarrow \vec{v} \in U \Rightarrow V \subset U$ ■

§6 线性映射

约定$(V,+,\overrightarrow{0_V},\cdot)$和$(W,+,\overrightarrow{0_W},\cdot)$是域$F$上的两个线性空间

【定义 6.1.1】线性映射

设映射$\varphi: V \to W$, 如果$\forall \alpha_1,\alpha_2 \in F, \forall \overrightarrow{v_1},\overrightarrow{v_2} \in V$

$\varphi(\alpha_1\overrightarrow{v_1}+\alpha_2\overrightarrow{v_2}) = \alpha_1\varphi(\overrightarrow{v_1})+\alpha_2\varphi(\overrightarrow{v_2})$

则称φ是从V到W的线性映射

注 1: 设$\varphi: V \to W$是线性映射

$\varphi(\overrightarrow{0_V}) = \overrightarrow{0_W}$ $\quad$ $[$令定义中 $\alpha_1 = \alpha_2 = 0]$

注 2: 设$\alpha_1,\dots,\alpha_k \in F, \overrightarrow{v_1},\dots,\overrightarrow{v_k} \in V$

$$\varphi\left(\sum_{i=1}^{k}\alpha_i\overrightarrow{v_i}\right) = \sum_{i=1}^{k}\alpha_i\varphi(\overrightarrow{v_i}) \quad [\text{利用定义对}k\text{归纳}]$$

用矩阵表示为

$$\varphi\left((\overrightarrow{v_1},\dots,\overrightarrow{v_k})\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_k\end{pmatrix}\right) = (\varphi(\overrightarrow{v_1}),\dots,\varphi(\overrightarrow{v_k}))\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_k\end{pmatrix}$$

【命题 6.1】线性映射保相关性

设$\varphi: V \to W$是线性映射, $\overrightarrow{v_1},\dots,\overrightarrow{v_k} \in V$

$\overrightarrow{v_1},\dots,\overrightarrow{v_k}$线性相关 $\Rightarrow \varphi(\overrightarrow{v_1}),\dots,\varphi(\overrightarrow{v_k})$线性相关

证: 设$\alpha_1,\dots,\alpha_k \in F$不全为零使得$(\overrightarrow{v_1},\dots,\overrightarrow{v_k})\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_k\end{pmatrix} = \overrightarrow{0_V}$

则$\left(\varphi(\overrightarrow{v_1}),\dots,\varphi(\overrightarrow{v_k})\right)\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_k\end{pmatrix}=\varphi\left(\overrightarrow{0_V}\right)=\overrightarrow{0_W}$

$\Rightarrow \varphi(\overrightarrow{v_1}),\dots,\varphi(\overrightarrow{v_k})$线性相关 ■

【命题 6.2】线性映射保子空间

设$\varphi: V\to W$是线性映射

$(i)U$是V的子空间$\Rightarrow \varphi(U)$是W的子空间

$(ii)Z$是W的子空间$\Rightarrow \varphi^{-1}(Z)$是$V$的子空间

证: (i)子集显然, 下证$\forall\overrightarrow{w_1},\overrightarrow{w_2}\in\varphi(U),\alpha,\beta\in F\Rightarrow\alpha\overrightarrow{w_1}+\beta\overrightarrow{w_2}\in\varphi(U)$

设$\overrightarrow{w_1}=\varphi(\overrightarrow{u_1}),\overrightarrow{w_2}\in\varphi(\overrightarrow{u_2}),\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2}\in U$

$\alpha\overrightarrow{w_1}+\beta\overrightarrow{w_2}=\alpha\varphi(\overrightarrow{u_1})+\beta\varphi(\overrightarrow{u_2})=\varphi(\alpha\overrightarrow{u_1}+\beta\overrightarrow{u_2})$

U为子空间$\Rightarrow\alpha\overrightarrow{u_1}+\beta\overrightarrow{u_2}\in U\Rightarrow\varphi(\alpha\overrightarrow{u_1}+\beta\overrightarrow{u_2})\in\varphi(U)$

$\therefore\alpha\overrightarrow{w_1}+\beta\overrightarrow{w_2}\in\varphi(U)\Rightarrow\varphi(U)$是$W$的子空间

(ii)类似

【定义 6.1.2】线性映射的核与像

设$\varphi: V\to W$是线性映射

φ的核是$\left\{\vec{v}\in V\middle|\varphi(\vec{v})=\overrightarrow{0_W}\right\}$ 记为$\ker\varphi$

φ的像是$\{\vec{w}\in W|\exists\vec{v}\in V,\varphi(\vec{v})=W\}$ 记为$\operatorname{im}\varphi$

注: 因为$\ker\varphi=\varphi^{-1}\left(\left\{\overrightarrow{0_W}\right\}\right)$和$\operatorname{im}\varphi=\varphi(V)$

所以核与像都是子空间

【定理 6.1】单射的判定

设$\varphi: V \to W$是线性映射, 则

φ是单射 $\Leftrightarrow \ker\varphi = \{\overrightarrow{0_V}\}$

证: $\Rightarrow$: $\because \varphi(\overrightarrow{0_V}) = \overrightarrow{0_W}$且$\varphi$是单射 $\therefore \ker\varphi = \{\overrightarrow{0_V}\}$

$\Leftarrow$: 设$\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2} \in V$使得$\varphi(\overrightarrow{v_1}) = \varphi(\overrightarrow{v_2})$

则$\varphi(\overrightarrow{v_1}) - \varphi(\overrightarrow{v_2}) = \overrightarrow{0_W}$

$\because \varphi$是线性映射 $\therefore \varphi(\overrightarrow{v_1} - \overrightarrow{v_2}) = \overrightarrow{0_W}$

于是$\overrightarrow{v_1} - \overrightarrow{v_2} \in \ker\varphi$

$\because \ker\varphi = \{\overrightarrow{0_V}\}$ $\therefore \overrightarrow{v_1} - \overrightarrow{v_2} = \overrightarrow{0_V} \Rightarrow \overrightarrow{v_1} = \overrightarrow{v_2}$

$\therefore \varphi$是单射 ■

【例 6.1.1】求线性映射的核与像

验证下列映射是线性映射, 确定他们的核与像.

$(i)\varphi: F^n \to F^m, \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mapsto A\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, A \in F^{m\times n}$

$\ker\varphi$ 是$A\vec{x} = \overrightarrow{0_m}$的解空间, $\quad \operatorname{im}\varphi = \left\langle \overrightarrow{A^{(1)}}, \dots, \overrightarrow{A^{(n)}} \right\rangle$

$(ii)\varphi: \mathbb{R}[x] \to \mathbb{R}[x], f(x) \mapsto f'(x)$

$\ker\varphi = \mathbb{R}, \quad \operatorname{im}\varphi = \mathbb{R}[x]$

$(iii)\varphi: C[a,b] \to C[a,b], f(x) \mapsto \int_a^x f(t)dt$

$\ker\varphi = \{\vec{0}\}, \quad \operatorname{im}\varphi \subset C[a,b]$

(iv)设$V = U_1 \oplus \cdots \oplus U_k$是子空间直和分解

则$\forall \vec{v} \in V, \exists! \overrightarrow{u_1} \in U_1, \dots, \overrightarrow{u_k} \in U_k$使得$\vec{v} = \overrightarrow{u_1} + \cdots + \overrightarrow{u_k}$

定义$P_i: V \to V, \vec{v} \mapsto \overrightarrow{u_i}$ 称为V在U_i上的投影, $i = 1, \dots, k$

验证P_i是线性映射, $i = 1, \dots, k$, 只要验证P_1即可.

设$\vec{x},\vec{y}\in V,\alpha,\beta\in F$

则$\exists!\,\overrightarrow{x_1}\in U_1,\dots,\overrightarrow{x_k}\in U_k,\overrightarrow{y_1}\in U_1,\dots,\overrightarrow{y_k}\in U_k$

使得$\vec{x}=\overrightarrow{x_1}+\cdots+\overrightarrow{x_k},\vec{y}=\overrightarrow{y_1}+\cdots.+\overrightarrow{y_k}$

$\alpha\vec{x}+\beta\vec{y}=\underbrace{(\alpha\overrightarrow{x_1}+\beta\overrightarrow{y_1})}_{\in U_1}+\underbrace{(\alpha\overrightarrow{x_2}+\beta\overrightarrow{y_2})}_{\in U_2}+\cdots+\underbrace{(\alpha\overrightarrow{x_k}+\beta\overrightarrow{y_k})}_{\in U_k}$

$P_1(\alpha\vec{x}+\beta\vec{y})=\alpha\overrightarrow{x_1}+\beta\overrightarrow{y_1}=\alpha P_1(\vec{x})+\beta P_1(\vec{y})$

$\therefore P_1$是线性的

$P_1(\vec{x})=\vec{0}\Leftrightarrow\overrightarrow{x_1}=0\Leftrightarrow\vec{x}=\vec{0}+\overrightarrow{x_2}+\cdots+\overrightarrow{x_n}\Leftrightarrow\vec{x}\in U_2+\cdots+U_k$

于是$\ker P_1=U_2+\cdots+U_k,\qquad \operatorname{im}P_1=U_1$是显然的

(v)设U是V的子空间,$\pi:V\to V/U,\vec{v}\mapsto\vec{v}+U$

$\forall\overrightarrow{v_1},\overrightarrow{v_2}\in V,\overrightarrow{\alpha_1},\overrightarrow{\alpha_2}\in F$

$\pi(\alpha_1\overrightarrow{v_1}+\alpha_2\overrightarrow{v_2})=(\alpha_1\overrightarrow{v_1}+\alpha_2\overrightarrow{v_2})+U$

$=\alpha_1(\overrightarrow{v_1}+U)+\alpha_2(\overrightarrow{v_2}+U)=\alpha_1\pi(\overrightarrow{v_1})+\alpha_2\pi(\overrightarrow{v_2})$

$\pi(\vec{v})=\overrightarrow{0_V}+U\Leftrightarrow\vec{v}+U=\overrightarrow{0_V}+U\Leftrightarrow\vec{v}\sim_U\overrightarrow{0_V}$

$\Leftrightarrow\vec{v}-\vec{0}\in U\Leftrightarrow\vec{v}\ \in U$

于是$\ker\pi=U,\operatorname{im}\pi=V/U$

【例 6.1.2】映射空间

$\operatorname{Map}(S,W)=\{\varphi|\varphi:S\to W\}$

其中S是非空集合,φ是任意映射

$\forall\varphi_1,\varphi_2\in\operatorname{Map}(S,W),\qquad\varphi_1+\varphi_2:S\to W,s\mapsto\varphi_1(s)+\varphi_2(s)$

$\forall\alpha\in F,\varphi\in\operatorname{Map}(S,W),\qquad\alpha\varphi:S\to W,s\to\alpha\varphi(s)$

$\mathcal{O}_S:S\to W,s\mapsto\overrightarrow{0_W}$

则$\big(Map(S,W),+,\mathcal{O}_S,$数乘$\big)$是$F$上的线性空间

其验证过程与$\operatorname{Func}(S,F)$ 相同

【定理 6.2】线性映射空间

令 $\mathrm{Hom}(V,W)$ 是从V到W的所有线性映射的集合

则 $\mathrm{Hom}(V,W)$ 是 $\mathrm{Map}(V,W)$的子空间

证: 设 $\alpha,\beta \in F,\varphi,\psi \in \mathrm{Hom}(V,W)$

令$\theta = \alpha\varphi + \beta\psi$, 只要验证$\theta \in \mathrm{Hom}(V,W)$

即只要验证$\forall \vec{x},\vec{y} \in V,\lambda \in F,$

$\theta(\vec{x}+\vec{y}) = \theta(\vec{x}) + \theta(\vec{y}), \qquad \theta(\lambda\vec{x}) = \lambda\theta(\vec{x})$ 即可

$\theta(\vec{x}+\vec{y}) = (\alpha\varphi+\beta\psi)(\vec{x}+\vec{y}) \qquad [\theta\text{的定义}]$

$= (\alpha\varphi)(\vec{x}+\vec{y}) + (\beta\psi)(\vec{x}+\vec{y}) \qquad [\text{映射相加的定义}]$

$= \alpha\varphi(\vec{x}+\vec{y}) + \beta\psi(\vec{x}+\vec{y}) \qquad [\text{映射数乘的定义}]$

$= \alpha\big(\varphi(\vec{x})+\varphi(\vec{y})\big) + \beta\big(\psi(\vec{x})+\psi(\vec{y})\big) \qquad [\varphi,\psi\text{线性}]$

$= [\alpha\varphi(\vec{x})+\beta\psi(\vec{x})] + [\alpha\varphi(\vec{y})+\beta\psi(\vec{y})] \quad [\text{交换结合分配律}]$

$= (\alpha\varphi)(\vec{x}) + (\beta\psi)(\vec{x}) + (\alpha\varphi)(\vec{y}) + \big(\beta\psi(\vec{y})\big) \quad [\text{数乘定义}]$

$= (\alpha\varphi+\beta\psi)(\vec{x}) + (\alpha\varphi+\beta\psi)(\vec{y}) \qquad [\text{加法定义}]$

$= \theta(\vec{x}) + \theta(\vec{y}) \qquad [\theta\text{的定义}]$

类似可证$\theta(\lambda\vec{x}) = \lambda\theta(\vec{x})$

于是$\theta \in \mathrm{Hom}(V,W)$

【定理 6.3】线性映射复合性

设V_1,V_2,V_3是F上的三个线性空间

$\varphi_1 \in \mathrm{Hom}(V_1,V_2)$, $\varphi_2 \in \mathrm{Hom}(V_2,V_3)$, 则$\varphi_2\circ\varphi_1 \in \mathrm{Hom}(V_1,V_3)$

证: 设$\alpha,\beta \in F,\vec{x},\vec{y} \in V$

$\varphi_2\circ\varphi_1(\alpha\vec{x}+\beta\vec{y}) = \varphi_2\big(\varphi_1(\alpha\vec{x}+\beta\vec{y})\big)$

$= \varphi_2(\alpha\varphi_1(\vec{x})+\beta\varphi_1(\vec{y})) = \alpha\varphi_2\big(\varphi_1(\vec{x})\big) + \beta\varphi_2(\varphi_1(\vec{y}))$

$= \alpha(\varphi_2\circ\varphi_1)(\vec{x}) + \beta(\varphi_2\circ\varphi_1)(\vec{y}) \quad \blacksquare$

【例 6.1.3】零映射与恒同映射

$\mathcal{O}_{V,W}: V \to W, \vec{v} \mapsto \overrightarrow{0_W}$ 称为零映射

$\mathcal{E}_V: V \to V, \vec{v} \mapsto \vec{v}$ 称为恒同映射

$\mathcal{O}_V \in \mathrm{Hom}(V, W), \mathcal{E}_V \in \mathrm{Hom}(V, V)$

当定义域与值域已经说明,可以将它们分别简记为$\mathcal{O}, \mathcal{E}$

【例 6.1.4】求导与积分映射

设$\mathcal{D}: \mathbb{R}[x] \to \mathbb{R}[x], f \mapsto f'$

$$a \in \mathbb{R}, \mathcal{J}: \mathbb{R}[x] \to \mathbb{R}[x], f(x) \mapsto \int_a^x f(x)\,\mathrm{d}x$$

计算$\mathcal{D} \circ \mathcal{J}$ 和 $\mathcal{J} \circ \mathcal{D}$

$$\mathcal{D} \circ \mathcal{J}\big(f(x)\big) = \mathcal{D}\left(\int_a^x f(x)\,\mathrm{d}x\right) = f(x)$$

$\therefore \mathcal{D} \circ \mathcal{J} = \mathcal{E}$

$$\mathcal{J} \circ \mathcal{D}\big(f(x)\big) = \int_a^x f'(t)\,\mathrm{d}t = f(x) - f(a)$$

【例 6.1.5】投影映射

设$V = U_1 \oplus \cdots \oplus U_k$是子空间直和分解

$P_i \in \mathrm{Hom}(V, V)$ 是V到U_i的投影,$i = 1, \ldots, n$

证明: $(i) \forall i \in \{1, \ldots, n\}, P_i \circ P_i = P_i$

$(ii) \forall i, j \in \{1, \ldots, n\}, i \neq j, \qquad P_i \circ P_j = \mathcal{O}_V$

$(iii) P_1 + \cdots + P_k = \mathcal{E}_V$

证: (i)设$\vec{v} \in V, \exists! \overrightarrow{u_1} \in U_1, \ldots, \overrightarrow{u_k} \in U_k$,使得$\vec{v} = \overrightarrow{u_1} + \cdots + \overrightarrow{u_k}$

$P_i(\vec{v}) = \overrightarrow{u_i}, P_i \circ P_i(\vec{v}) = P_i(\overrightarrow{u_i})$

$\because \overrightarrow{u_i} = \vec{0} + \cdots + \vec{0} + \overrightarrow{u_i} + \vec{0} + \cdots + \vec{0}$

$\therefore P_i(\overrightarrow{u_i}) = \overrightarrow{u_i} \Rightarrow P_i(\vec{v}) = P_i \circ P_i(\vec{v}) \Rightarrow P_i = P_i \circ P_i$

(ii)设$i \neq j, P_j(\vec{v}) = \overrightarrow{u_j}, P_\mathrm{i} \circ P_j(\vec{v}) = P_i(\overrightarrow{u_j})$

$\because \overrightarrow{u_j} = \vec{0} + \cdots + \overrightarrow{0_i} + \cdots \vec{0} + \overrightarrow{u_j} + \vec{0} + \cdots + \vec{0}$

$\therefore P_i(\overrightarrow{u_j}) = \vec{0} \Rightarrow P_i \circ P_j(\vec{v}) = \vec{0}$

$\therefore P_i \circ P_j = \mathcal{O}$

$(iii)(P_1 + \cdots + P_k)(\vec{v}) = P_1(\vec{v}) + \cdots + P_k(\vec{v})$

$= \overrightarrow{u_1} + \cdots + \overrightarrow{u_k} = \vec{v} \Rightarrow P_1 + \cdots + P_k = \mathcal{E}$ ■

【定理 6.4】线性映射分解定理

设$\varphi \in \mathrm{Hom}(V, W)$, $\pi: V \to V/_{\ker\varphi}$是商映射

则$\exists!$ 线性映射$\bar{\varphi}: V/_{\ker\varphi} \to W$, 使得$\varphi = \bar{\varphi} \circ \pi$

证: 设$U = \ker\varphi$, $\vec{x}, \vec{y} \in V$

$\vec{x} \sim_\varphi \vec{y} \Leftrightarrow \varphi(\vec{x}) = \varphi(\vec{y}) \Leftrightarrow \varphi(\vec{x} - \vec{y}) = \overrightarrow{0_W} \Rightarrow \vec{x} - \vec{y} \in \ker\varphi = U$

$\Leftrightarrow \vec{x} \sim_U \vec{y}$

于是$\bar{\vec{x}} = \vec{x} + U$且$V/_{\sim_\varphi} = V/_U$

由映射分解定理,$\exists$单射$\bar{\varphi}: V/_U \to W$, 使得$\varphi = \bar{\varphi} \circ \pi$

可知$\pi \in \mathrm{Hom}(V, V/_U)$

只要验证 $\bar{\varphi} \in \mathrm{Hom}(V/_U, W)$ 即可

$\forall \alpha, \beta \in F, \vec{x}, \vec{y} \in V$

$\bar{\varphi}\big((\alpha\vec{x} + \beta\vec{y}) + U\big) = \varphi(\alpha\vec{x} + \beta\vec{y}) = \alpha\varphi(\vec{x}) + \beta\varphi(\vec{y})$

$= \alpha\bar{\varphi}(\vec{x} + U) + \beta\bar{\varphi}(\vec{y} + U)$

$\Rightarrow \bar{\varphi}$是线性映射 ■

由此可知,任何线性映射是线性满射和线性单射的复合

【例 6.1.6】迹映射

$\mathrm{tr}: F^{n\times n} \to F, X \mapsto \mathrm{tr}\, X$

设$X = (x_{ij})_{n\times n}, Y = (y_{ij})_{n\times n}, \alpha, \beta \in F$

$\mathrm{tr}(\alpha X + \beta Y) = \mathrm{tr}\left((\alpha x_{ij} + \beta y_{ij})\right)$

$= \sum_{i=1}^{n} (\alpha x_{ii} + \beta y_{ii}) = \alpha \sum_{i=1}^{n} x_{ii} + \beta \sum_{i=1}^{n} y_{ii}$

$= \alpha\, \mathrm{tr}\, X + \beta\, \mathrm{tr}\, Y$

于是 tr 是线性映射

$X \in \ker \mathrm{tr} \Leftrightarrow x_{11} + \cdots + x_{nn} = 0$

$\Rightarrow \dim \ker \mathrm{tr} = n^2 - 1$

证法 1: $x_{11} + \cdots + x_{nn} = 0$ 是$X = (x_{ij})_{n\times n}$唯一的限制

于是$x_{ij}, i, j \in \{1, \dots, n\}$满足一个系数矩阵秩为 1 的线性齐次方程

证法 2: $\mathrm{im}\, \mathrm{tr} = F, \dim \mathrm{im}\, \mathrm{tr} = 1$

$\because \dim \ker \mathrm{tr} + \dim \mathrm{im}\, \mathrm{tr} = n^2$

$\therefore \dim \ker \mathrm{tr} = n^2 - 1$

§7 有限维线性空间的坐标

约定: 在本节中V是域F上的线性空间, $\dim V < \infty$

【命题 7.1】向量的基底线性表示

设$\overrightarrow{e_1}, \dots, \overrightarrow{e_n}$是$V$的一组基, 则$\exists!\, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in F$

使得 $\vec{v} = \alpha_1 \overrightarrow{e_1} + \cdots + \alpha_n \overrightarrow{e_n}$ [*]

证: 存在性即基底的定义

唯一性: 再设$\vec{v} = \beta_1 \overrightarrow{e_1} + \cdots + \beta_n \overrightarrow{e_n}, \beta_i \in F$

由[*], $(\alpha_1 - \beta_1)\overrightarrow{e_1} + \cdots + (\alpha_n - \beta_n)\overrightarrow{e_n} = \vec{0}$

$\because \overrightarrow{e_1}, \dots, \overrightarrow{e_n}$线性无关 $\therefore \alpha_1 = \beta_1, \dots, \alpha_n = \beta_n$ ■

【定义 7.1.1】坐标

称$\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$为$\vec{v}$在基底$\overrightarrow{e_1}, \dots, \overrightarrow{e_n}$下的坐标

【例 7.1.1】在标准基下的坐标

$$V = F^n, \overrightarrow{e_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \overrightarrow{e_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \overrightarrow{e_n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

设$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, 则$\vec{x} = x_1 \overrightarrow{e_1} + \cdots + x_n \overrightarrow{e_n}$

即$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$是$\vec{x}$在$\overrightarrow{e_1}, \dots, \overrightarrow{e_n}$下的坐标

【例 7.1.2】多项式空间的坐标

设$V = F_n[x], \overrightarrow{e_i} = x^{i-1}, i = 1, .., n$

$f(x) = f_0 + f_1 x + \cdots + f_{n-1}x^{n-1}, \qquad f_0, \dots, f_{n-1} \in F$

$= f_0\overrightarrow{e_1} + \cdots + f_{n-1}\overrightarrow{e_n}$

$\therefore \begin{pmatrix} f_0 \\ \vdots \\ f_{n-1} \end{pmatrix}$是$f$在$\overrightarrow{e_1}, \dots, \overrightarrow{e_n}$下的坐标

【例 7.1.3】矩阵空间的坐标

设$V = F^{n\times n}, e_{ij} = M_{ij}, M_{ij}$在$i$行$j$列处为 1, 其它处为 0

设$X = (x_{ij})_{n\times n} \in V$, 则$X = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_{ij}\overrightarrow{e_{ij}}$

于是$(x_{11} \ \cdots \ x_{n1} \ \cdots \ x_{1n} \ \cdots \ x_{nn})^t$

是X在$\overrightarrow{e_{11}}, \dots, \overrightarrow{e_{n1}}, \dots, \overrightarrow{e_{n1}}, \dots, \overrightarrow{e_{nn}}$下的坐标

【引理 7.1】向量组的矩阵表示

设$\overrightarrow{e_1}, \dots, \overrightarrow{e_n}$是$V$的一组基, $\overrightarrow{v_1}, \dots, \overrightarrow{v_m} \in V$,

则$\exists! A \in F^{n\times m}$, 使得$(\overrightarrow{v_1}, \dots, \overrightarrow{v_n}) = (\overrightarrow{e_1}, \dots, \overrightarrow{e_n})A$

证: 设$\begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{pmatrix}$是$\overrightarrow{v_j}$在$\overrightarrow{e_1}, \dots, \overrightarrow{e_n}$下的坐标, $j = 1, \dots, m$

则$\overrightarrow{v_j} = (\overrightarrow{e_1}, \dots, \overrightarrow{e_n})\begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{pmatrix}$

$(\overrightarrow{v_1}, .., \overrightarrow{v_m}) = (\overrightarrow{e_1}, \dots, \overrightarrow{e_n})\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}}_{A}$

设$B \in F^{n\times m}$, 使得$(\overrightarrow{v_1}, \dots, \overrightarrow{v_m}) = (\overrightarrow{e_1}, \dots, \overrightarrow{e_n})B$

则$\overrightarrow{v_j} = (\overrightarrow{e_1}, \dots, \overrightarrow{e_n})\overrightarrow{B^{(j)}}$

于是$\overrightarrow{B^{(j)}}$是$\overrightarrow{v_j}$在$\overrightarrow{e_1}, \dots, \overrightarrow{e_n}$下的坐标

由坐标的唯一性得$\overrightarrow{A^{(j)}} = \overrightarrow{B^{(j)}}, j = 1, \dots, m$

$\therefore A = B$ ■

【定理 7.1】基变换

设$\overrightarrow{e_1}, \dots, \overrightarrow{e_n}$是$V$的一组基,$\overrightarrow{\varepsilon_1}, \dots, \overrightarrow{\varepsilon_n} \in V$

则$\overrightarrow{\varepsilon_1}, \dots, \overrightarrow{\varepsilon_n}$是$V$的一组基 $\Leftrightarrow \exists!\, A \in GL_n(F)$ 使得

$(\overrightarrow{\varepsilon_1}, \dots, \overrightarrow{\varepsilon_n}) = (\overrightarrow{e_1}, \dots, \overrightarrow{e_n})A$ [**]

证: $\Rightarrow$: 由引理 7.1,$\exists!\, A \in F^{n\times n}$

使得$(\overrightarrow{\varepsilon_1}, \dots, \overrightarrow{\varepsilon_n}) = (\overrightarrow{e_1}, \dots, \overrightarrow{e_n})A$

$\because \overrightarrow{\varepsilon_1}, \dots, \overrightarrow{\varepsilon_n}$也是基 $\therefore \exists!\, B \in F^{n\times m}$

使得$(\overrightarrow{e_1}, \dots, \overrightarrow{e_n}) = (\overrightarrow{\varepsilon_1}, \dots, \overrightarrow{\varepsilon_n})B$

于是$(\overrightarrow{e_1}, \dots, \overrightarrow{e_n}) = (\overrightarrow{e_1}, \dots, \overrightarrow{e_n})AB$

由引理 7.1 中唯一性,$AB = E$

即$A \in GL_n(F)$

$\Leftarrow$: 只要证$\overrightarrow{\varepsilon_1}, \dots, \overrightarrow{\varepsilon_n}$线性无关即可

设$\alpha_1, \dots, \alpha_n \in F$使得$(\overrightarrow{\varepsilon_1}, \dots, \overrightarrow{\varepsilon_n})\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_n\end{pmatrix} = \vec{0}$

则由[**],$(\overrightarrow{e_1}, \dots, \overrightarrow{e_n})A\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_n\end{pmatrix} = \vec{0}$

$\because \overrightarrow{e_1}, \dots, \overrightarrow{e_n}$是线性无关的 $\therefore A\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_n\end{pmatrix} = \vec{0}$

$\because A$可逆 $\therefore \alpha_1, \dots, \alpha_n = 0$

即$\overrightarrow{\varepsilon_1},\dots,\overrightarrow{\varepsilon_n}$线性无关 ■

注: 称[$**$]为从基底$\overrightarrow{e_1},\dots,\overrightarrow{e_n}$到$\overrightarrow{\varepsilon_1},\dots,\overrightarrow{\varepsilon_n}$的转换矩阵

【例 7.1.4】三维线性空间例

在$\mathbb{R}^3$中$\overrightarrow{e_1}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\overrightarrow{e_2}=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\overrightarrow{e_3}=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$

设$\overrightarrow{v_1}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\overrightarrow{v_2}=\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix},\overrightarrow{v_3}=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{w_1}=\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix},\overrightarrow{w_2}=\begin{pmatrix}4\\1\\3\end{pmatrix},\overrightarrow{w_3}=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$

问 $\overrightarrow{v_1},\overrightarrow{v_2},\overrightarrow{v_3}$和$\overrightarrow{w_1},\overrightarrow{w_2},\overrightarrow{w_3}$是不是$\mathbb{R}^3$的基底

如果是, 求从$\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2},\overrightarrow{e_3}$到新基底的转换矩阵

解: $(\overrightarrow{v_1},\overrightarrow{v_2},\overrightarrow{v_3})=(\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2},\overrightarrow{e_3})\underbrace{\begin{pmatrix}1&1&0\\1&2&0\\1&1&1\end{pmatrix}}_{A}$

$\because \det A\neq 0 \quad \therefore A$可逆

$\therefore \overrightarrow{v_1},\overrightarrow{v_2},\overrightarrow{v_3}$是基, 对应的转换矩阵为$A$

$(\overrightarrow{w_1},\overrightarrow{w_2},\overrightarrow{w_3})=(\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2},\overrightarrow{e_3})\underbrace{\begin{pmatrix}2&4&1\\1&1&0\\1&3&1\end{pmatrix}}_{B}$

$B\to\begin{pmatrix}2&4&1\\1&1&0\\-1&-1&0\end{pmatrix}\Rightarrow \operatorname{rank}B=2$

$\Rightarrow \overrightarrow{w_1},\overrightarrow{w_2},\overrightarrow{w_3}$不是$\mathbb{R}^3$的基底

【推论 7.1】坐标变换

设$\overrightarrow{e_1},\dots,\overrightarrow{e_n};\overrightarrow{\varepsilon_1},\dots,\overrightarrow{\varepsilon_n}$是$V$的两组基

A是由$\overrightarrow{e_1},\dots,\overrightarrow{e_n}$到$\overrightarrow{\varepsilon_1},\dots,\overrightarrow{\varepsilon_n}$的转换矩阵

设$\vec{v}\in V$在$\overrightarrow{e_1},\dots,\overrightarrow{e_n}$和$\overrightarrow{\varepsilon_1},\dots,\overrightarrow{\varepsilon_n}$下的坐标分别是$\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_n\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\beta_1\\ \vdots\\ \beta_n\end{pmatrix}$

则$\begin{pmatrix}\beta_1\\ \vdots\\ \beta_n\end{pmatrix}=A^{-1}\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_n\end{pmatrix}$

证: 设$\vec{v}=(\overrightarrow{e_1},\dots,\overrightarrow{e_n})\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_n\end{pmatrix}=(\overrightarrow{\varepsilon_1},\dots,\overrightarrow{\varepsilon_n})\begin{pmatrix}\beta_1\\ \vdots\\ \beta_n\end{pmatrix}$

$\because (\overrightarrow{\varepsilon_1},\dots,\overrightarrow{\varepsilon_n})=(\overrightarrow{e_1},\dots,\overrightarrow{e_n})A$

$\therefore \vec{v}=(\overrightarrow{e_1},\dots,\overrightarrow{e_n})A\begin{pmatrix}\beta_1\\ \vdots\\ \beta_n\end{pmatrix}$

由坐标的唯一性得$\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_n\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}\beta_1\\ \vdots\\ \beta_n\end{pmatrix}$

$\therefore \begin{pmatrix}\beta_1\\ \vdots\\ \beta_n\end{pmatrix}=A^{-1}\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_n\end{pmatrix}$ ■

【例 7.1.5】平面上的旋转

$V=\mathbb{R}^2$

$\overrightarrow{e_1}'=\cos\theta\,\overrightarrow{e_1}+\sin\theta\,\overrightarrow{e_2},\qquad \overrightarrow{e_2}'=-\sin\theta\,\overrightarrow{e_1}+\cos\theta\,\overrightarrow{e_2}$

$\left(\overrightarrow{e_1}',\overrightarrow{e_2}'\right)=(\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2})\underbrace{\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}}_{A}$

$A^{-1}=\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -\sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$

设$\vec{v}=x\overrightarrow{e_1}+y\overrightarrow{e_2}=x'\overrightarrow{e_1}'+y'\overrightarrow{e_2}'$

则 $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

求方程 $\frac{3}{2}x^2 - xy + \frac{3}{2}y^2 = 1$ 在坐标变换

$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ 下的形式 $\quad\quad \left[\theta = \frac{\pi}{4}\right]$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow x = \frac{\sqrt{2}}{2}(x' - y'), \qquad y = \frac{\sqrt{2}}{2}(x' + y')$$

在新的坐标系下的方程为

$$\frac{3}{2}\left[\frac{\sqrt{2}}{2}(x' - y')\right]^2 - \left[\frac{\sqrt{2}}{2}(x' - y')\right]\left[\frac{\sqrt{2}}{2}(x' + y')\right] + \frac{3}{2}\left[\frac{\sqrt{2}}{2}(x' + y')\right]^2 = 1$$

化简得到 $x'^2 + 2y'^2 = 1$

【例 7.1.6】拉格朗日插值多项式

$V = F_n[x], \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in F$ 两两不同

令 $L_i(x) = \dfrac{(x-\alpha_1)\cdots(x-\alpha_{i-1})(x-\alpha_{i+1})\cdots(x-\alpha_n)}{(\alpha_i-\alpha_1)\cdots(\alpha_i-\alpha_{i-1})(\alpha_i-\alpha_{i+1})\cdots(\alpha_i-\alpha_n)}, i = 1, \ldots, n$

证明: $L_1, \ldots, L_n$ 是 $F_n[x]$ 的一组基

并求从 $1, x, \ldots, x^{n-1}$ 到 $L_1, \ldots, L_n$ 的基变换矩阵和相应的坐标变换公式

证: $\because \dim F_n[x] = n$ $\therefore$ 只需证明 $L_1, \ldots, L_n$ 线性无关

注意到 $L_i(\alpha_j) = \delta_{ij}, \qquad i, j \in \{1, \ldots, n\}$

设 $\beta_1, \ldots, \beta_n$ 使得 $\sum\limits_{i=1}^{n} \beta_i L_i(x) = 0$

则$\forall j \in \{1,\ldots,n\}, \sum_{i=1}^{n} \beta_i L_i(\alpha_j) = 0$

于是$\sum_{i=1}^{n} \beta_i \delta_{ij} = 0 \Rightarrow \beta_i \delta_{ii} = 0 \Rightarrow \beta_i = 0, \qquad i = 1,..,n$

$\therefore L_1,\ldots,L_n$线性无关

断言:设$p \in F_n[x]$,则$p(x) = p(\alpha_1)L_1(x) + \cdots + p(\alpha_n)L_n(x), \deg p < n$

断言的证明:设$q(x) = p(\alpha_1)L_1(x) + \cdots + p(\alpha_n)L_n(x), \deg q < n$

$$q(\alpha_j) = \sum_{i=1}^{n} p(\alpha_i)L_i(\alpha_j) = \sum_{i=1}^{n} p(\alpha_i)\delta_{ij} = p(\alpha_j), \qquad j = 1,\ldots,n$$

$\Rightarrow p(x) - q(x)$的根为$\alpha_1,\ldots,\alpha_n$

$\because \deg(p-q) \le \max\{\deg p, \deg q\} < n \quad \therefore p = q$ 断言成立

由断言可知$x^j = \alpha_1^j L_1(x) + \cdots + \alpha_n^j L_n(x), j = 0,\ldots,n-1$

即$(1 \ \ x \ \ \cdots \ \ x^{n-1}) = (L_1 \ \ L_2 \ \ \cdots \ \ L_n)\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & \alpha_1 & \cdots & \alpha_1^{n-1} \\ 1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \alpha_n & \cdots & \alpha_n^{n-1} \end{pmatrix}}_{A}$

$(L_1 \ \ L_2 \ \ \cdots \ \ L_n) = (1 \ \ x \ \ \cdots \ \ x^{n-1})A^{-1}$

设$p = (1 \ \ x \ \ \cdots \ \ x^{n-1})\begin{pmatrix} p_0 \\ \vdots \\ p_{n-1} \end{pmatrix} = (L_1 \ \ L_2 \ \ \cdots \ \ L_n)\begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix}$

则$\begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} p_0 \\ \vdots \\ p_{n-1} \end{pmatrix}$

$\beta_i = p_0 + p_1\alpha_i + \cdots + p_{n-1}\alpha_i^{n-1} = p(\alpha_i), i = 1,\ldots n$ ■

应用:求多项式q使得$q(\alpha_i) = \beta_i, i = 1,\ldots,n$

则$q(x) = \beta_1 L_1(x) + \cdots + \beta_n L_n(x)$

§8 线性同构

本节中,V,W是F上的线性空间

【定义 8.1.1】线性同构

如果存在$\varphi\in\mathrm{Hom}(V,W)$是双射,则称$V$和$W$是线性同构的

记为$V\simeq W$

【命题 8.1】双射的逆是线性映射

设$\varphi\in\mathrm{Hom}(V,W)$是双射,则$\varphi^{-1}\in\mathrm{Hom}(W,V)$

证: 设$\overrightarrow{w_1},\overrightarrow{w_2}\in W$

$\because\varphi$是双射,$\therefore\exists!\,\overrightarrow{v_1},\overrightarrow{v_2}\in V$ 使得 $\varphi(\overrightarrow{v_1})=\overrightarrow{w_1},\varphi(\overrightarrow{v_2})=\overrightarrow{w_2}$

由φ^{-1}的定义,$\varphi^{-1}(\overrightarrow{w_1})=\overrightarrow{v_1},\varphi^{-1}(\overrightarrow{w_2})=\overrightarrow{v_2}$

设$\alpha_1,\alpha_2\in F$

$\varphi(\alpha_1\overrightarrow{v_1}+\alpha_2\overrightarrow{v_2})=\alpha_1\varphi(\overrightarrow{v_1})+\alpha_2\varphi(\overrightarrow{v_2})=\alpha_1\overrightarrow{w_1}+\alpha_2\overrightarrow{w_2}$

由φ^{-1}的定义

$\varphi^{-1}(\alpha_1\overrightarrow{w_1}+\alpha_2\overrightarrow{w_2})=\alpha_1\overrightarrow{v_1}+\alpha_2\overrightarrow{v_2}=\alpha_1\varphi^{-1}(\overrightarrow{w_1})+\alpha_2\varphi^{-1}(\overrightarrow{w_2})$

$\therefore\varphi^{-1}\in\mathrm{Hom}(W,V)$ ■

【推论 8.1】线性同构是等价关系

证:$\mathcal{E}:V\to V$是恒同映射,线性双射$\Rightarrow V\simeq V$,自反性成立

设$V\simeq W$,则$\exists$双射$\varphi\in\mathrm{Hom}(V,W)$

由命题 8.1,$\varphi^{-1}\in\mathrm{Hom}(W,V)$

于是$W\simeq V$,对称性成立

设U是F上的线性空间，且$U \simeq V, V \simeq W$

则$\exists \varphi \in \mathrm{Hom}(U,V)$，$\psi \in \mathrm{Hom}(V,W)$都是双射

于是$\psi \circ \varphi \in \mathrm{Hom}(U,W)$也是双射

由此$U \simeq W$，传递性成立 ■

【命题 8.2】商核空间与像同构

设$\varphi \in \mathrm{Hom}(V,W)$则$V/_{\ker\varphi} \simeq \operatorname{im}\varphi$

特别地，当φ是满射时，$V/_{\ker\varphi} \simeq W$

证：由线性映射分解定理

$\exists \bar{\varphi} \in \mathrm{Hom}\left(V/_{\ker\varphi}, W\right)$是单射，$\pi$是从$V$到$V/_{\ker\varphi}$的商映射

使得$\varphi = \bar{\varphi} \circ \pi$

断言$\operatorname{im}\varphi = \operatorname{im}\bar{\varphi}$

断言证明：设$\vec{w} \in \operatorname{im}\varphi$则$\exists \vec{v} \in V$，使得$\varphi(\vec{v}) = \vec{w}$

$\vec{w} = \varphi(\vec{v}) = \bar{\varphi} \circ \pi(\vec{v}) = \bar{\varphi}(\vec{v} + \ker\varphi) \Rightarrow \vec{w} \in \operatorname{im}\bar{\varphi}$

设$\vec{w} \in \operatorname{im}\bar{\varphi}$，$\exists \vec{v} + \ker\varphi \in V/_{\ker\varphi}$

使得$\bar{\varphi}(\vec{v} + \ker\varphi) = \vec{w} \Rightarrow \bar{\varphi} \circ \pi(\vec{v}) = \vec{w} \Rightarrow \varphi(\vec{v}) = \vec{w}$

$\therefore \vec{w} \in \operatorname{im}\varphi \quad \therefore \operatorname{im}\varphi = \operatorname{im}\bar{\varphi}$，断言成立

$\because \bar{\varphi}$是单射 $\therefore \bar{\varphi}$是从$V/_{\ker\varphi}$到$\operatorname{im}\bar{\varphi}$的线性双射

于是$V/_{\ker\varphi} \simeq \operatorname{im}\bar{\varphi} \Rightarrow V/_{\ker\varphi} \simeq \operatorname{im}\varphi$ ■

【推论 8.2】子空间商交和商同构

设V_1,V_2是V的子空间,则$V_1/_{V_1\cap V_2}\simeq(V_1+V_2)/_{V_2}$

证:设$\varphi_1:V_1\to V_1+V_2,\overrightarrow{v_1}\mapsto\overrightarrow{v_1}$是线性的

$\pi_1:V_1+V_2\to(V_1+V_2)/_{V_2}$是商映射

则$\psi_1=\pi_1\circ\varphi_1$是从$V_1$到$(V_1+V_2)/_{V_2}$的线性映射

$\forall\vec{w}\in V_1+V_2,\exists\overrightarrow{v_1}\in V_1,\overrightarrow{v_2}\in V_2$使得$\vec{w}=\overrightarrow{v_1}+\overrightarrow{v_2}$

于是$\vec{w}+V_2=(\overrightarrow{v_1}+\overrightarrow{v_2})+V_2=(\overrightarrow{v_1}+V_2)+(\overrightarrow{v_2}+V_2)$

$=(\overrightarrow{v_1}+V_2)+(\vec{0}+V_2)=\overrightarrow{v_1}+V_2$

$\psi_1(\overrightarrow{v_1})=\pi_1\circ\varphi_1(\overrightarrow{v_1})=\pi_1(\overrightarrow{v_1})=\overrightarrow{v_1}+V_2=\vec{w}+V_2$

于是ψ_1是满射

断言: $\ker\psi_1=V_1\cap V_2$

断言的证明:$\vec{v}\in V_1\cap V_2$

$\psi_1(\vec{v})=\pi_1\circ\varphi_1(\vec{v})=\pi_1(\vec{v})=\vec{v}+V_2=\vec{0}+V_2$

$\Rightarrow\vec{V}\in\ker\psi_1$

$\vec{w}\in\ker\psi_1\subset V_1,\vec{0}+V_2=\psi_1(\vec{w})=\pi_1\circ\varphi_1(\overrightarrow{w_1})=\vec{w}+V_2$

$\Rightarrow\vec{w}\in V_2\Rightarrow\vec{w}\in V_1\cap V_2$

$\therefore\ker\psi_1=V_1\cap V_2$,断言成立

由命题 8.2,$V_1/_{V_1\cap V_2}\simeq(V_1+V_2)/_{V_2}$ ■

注:如果$\varphi\in\mathrm{Hom}(V,W)$的定义不依赖于基底的选择

φ就称为是“自然的”

【例 8.1.1】自然同构

$\mathcal{O}_{V,W}:V\to W,\vec{v}\mapsto\overrightarrow{0_W},\qquad\mathcal{E}:V\to V,\vec{v}\mapsto\vec{v}$

设U是V的子空间,　　$\pi: V \to V/_U, \vec{v} \mapsto \vec{v} + U$

如果$\exists \varphi \in \mathrm{Hom}(V, W)$,使得$\varphi$是双射而且“自然”

则称V, W自然同构

【例 8.1.2】推论 8.2 自然同构

由推论 8.2,$V_1/_{V_1 \cap V_2}$自然同构于$(V_1 + V_2)/_{V_2}$

【定理 8.1】等量基映射唯一性

设$\dim V < \infty, \overrightarrow{e_1}, \dots, \overrightarrow{e_n}$是$V$的一组基,$\overrightarrow{w_1}, \dots, \overrightarrow{w_n}$是$W$中任意向量

则$\exists! \varphi \in \mathrm{Hom}(V, W)$使得$\varphi(\overrightarrow{e_i}) = \overrightarrow{w_i}$,　　$i = 1, \dots, n$

证:$\forall \vec{x} = x_1\overrightarrow{e_1} + \cdots + x_n\overrightarrow{e_n}$,　　$\varphi: V \to W, \vec{x} \mapsto x_1\overrightarrow{w_1} + \cdots + x_n\overrightarrow{w_n}$

由坐标的唯一性,φ是良定义的,且$\varphi(\overrightarrow{e_i}) = \overrightarrow{w_i}, i = 1, \dots, n$

再设$\vec{y} = y_1\overrightarrow{e_1} + \cdots + y_n\overrightarrow{e_n}, \alpha, \beta \in F$

$$\varphi(\alpha\vec{x} + \beta\vec{y}) = \varphi\left(\alpha\sum_{i=1}^{n} x_i\overrightarrow{e_i} + \beta\sum_{i=1}^{n} y_i\overrightarrow{e_i}\right)$$

$$= \varphi\left(\sum_{i=1}^{n}(\alpha x_i + \beta y_i)\overrightarrow{e_i}\right) = \left(\sum_{i=1}^{n}(\alpha x_i + \beta y_i)\right)\overrightarrow{w_i}$$

$$= \alpha\sum_{i=1}^{n} x_i\overrightarrow{w_i} + \beta\sum_{i=1}^{n} y_i\overrightarrow{w_i} = \alpha\varphi(\vec{x}) + \beta\varphi(\vec{y})$$

于是$\varphi \in \mathrm{Hom}(V, W)$,存在性得证

再设$\psi \in \mathrm{Hom}(V, W)$满足$\psi(\overrightarrow{e_i}) = \overrightarrow{w_i}$,　　$i = 1, \dots, n$

于是$\psi(\vec{x}) = \psi\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\overrightarrow{e_i}\right) = \sum_{i=1}^{n} x_i\,\psi(\overrightarrow{e_i}) = \sum_{i=1}^{n} x_i\overrightarrow{w_i}$

$= \varphi(\vec{x}) \Rightarrow \psi = \varphi$　　■

【例 8.1.3】等量基映射至基域例

设$\overrightarrow{e_1},\dots,\overrightarrow{e_n}$是$V$的基,$\alpha_1,\dots,\alpha_n\in F$,则$\exists!$ 线性函数$f\in\mathrm{Hom}(V,F)$

使得$f(\overrightarrow{e_i})=\alpha_i,i=1,\dots,n$

设$\vec{x}=x_1\overrightarrow{e_1}+\cdots+x_n\overrightarrow{e_n}$

$f(\vec{x})=x_1f(\overrightarrow{e_1})+\cdots+x_nf(\overrightarrow{e_n})=\alpha_1x_1+\cdots+\alpha_nx_n$

即 $\mathrm{Hom}(V,F)$ 可以看成$F[x_1,\dots,x_n]$中齐一次多项式的集合

【定理 8.2】同构空间维数相等

设V是F上的有限维向量空间,则$V\simeq W\Leftrightarrow\dim V=\dim W$

证: $\Rightarrow$ 设$\varphi\in\mathrm{Hom}(V,W)$ 是双射,$\overrightarrow{e_1},\dots,\overrightarrow{e_n}$是$V$的基

令$\overrightarrow{\varepsilon_i}=\varphi(\overrightarrow{e_i}),\qquad i=1,\dots,n$

若$\exists\alpha_1,\dots,\alpha_n\in F$使得$\alpha_1\overrightarrow{\varepsilon_1}+\cdots+\alpha_n\overrightarrow{\varepsilon_n}=\overrightarrow{0_W}$

则$\alpha_1\varphi(\overrightarrow{e_1})+\cdots+\alpha_n\varphi(\overrightarrow{e_n})=\overrightarrow{0_W}$

于是$\varphi\big(\alpha_1\overrightarrow{e_1}+\cdots+\alpha_n\varphi(\overrightarrow{e_n})\big)=\overrightarrow{0_W}$

$\because\varphi$是单射 $\quad\therefore\alpha_1\overrightarrow{e_1}+\cdots+\alpha_n\overrightarrow{e_n}=\overrightarrow{0_V}\Rightarrow\alpha_1=\cdots=\alpha_n=0$

$\forall\vec{w}\in W,\exists\vec{v}\in V$,使得$\varphi(\vec{v})=\vec{w}$

设$\vec{v}=\beta_1\overrightarrow{e_1}+\cdots+\beta_n\overrightarrow{e_n}$,

则$\vec{w}=\varphi(\vec{v})=\beta_1\varphi(\overrightarrow{e_1})+\cdots+\beta_n\varphi(\overrightarrow{e_n})=\beta_1\overrightarrow{\varepsilon_1}+\cdots+\beta_n\overrightarrow{\varepsilon_n}$

于是$\overrightarrow{\varepsilon_1},\dots,\overrightarrow{\varepsilon_n}$是$W$的基$\Rightarrow\dim W=\dim V$

$\Leftarrow$: 设$\overrightarrow{e_1},\dots,\overrightarrow{e_n}$是$V$的基,$\overrightarrow{\varepsilon_1},\dots,\overrightarrow{\varepsilon_n}$是$W$的基

由定理 8.1,$\exists\varphi\in\mathrm{Hom}(V,W)$,使得$\varphi(\overrightarrow{e_i})=\overrightarrow{\varepsilon_i},i=1,\dots,n$

同理$\exists\psi\in\mathrm{Hom}(W,V)$,使得$\psi(\overrightarrow{\varepsilon_i})=\overrightarrow{e_i},i=1,\dots,n$

$\therefore\psi\circ\varphi(\overrightarrow{e_i})=\overrightarrow{e_i},i=1,\dots,n$

由唯一性,$\psi\circ\varphi=\mathcal{E}_V$

同理,$\varphi\circ\psi=\mathcal{E}_W$,于是$\psi=\varphi^{-1}$,$\varphi$是双射

$\Rightarrow V \simeq W$ ■

注: F上任何n维线性空间都同构于F^n

【推论 8.3】像核维数定理

设$\varphi \in \operatorname{Hom}(V, W)$, 且$\dim V < \infty$

则$\dim \ker \varphi + \dim \operatorname{im} \varphi = \dim V$

证: 由命题 8.2, $V/_{\ker \varphi} \simeq \operatorname{im} \varphi$

由定理 8.2, $\dim V/_{\ker \varphi} = \dim \operatorname{im} \varphi$

由命题 5.1, $\dim V - \dim \ker \varphi = \dim \operatorname{im} \varphi$ ■

【例 8.1.4】迹映射像核维数

$\operatorname{tr}: F^{n \times n} \to F, \left(x_{ij}\right)_{n \times n} \mapsto x_{11} + x_{22} + \cdots + x_{nn}$

$\operatorname{im} \operatorname{tr} = F$

$\dim \ker \operatorname{tr} = \dim F^{n \times n} - \dim \operatorname{im} \operatorname{tr} = n^2 - 1$

【例 8.1.5】子空间维数公式证明

重新证明维数公式:

设V是有限维线性空间, $V_1, V_2 \subset V$是子空间

则$\dim(V_1 + V_2) + \dim(V_1 \cap V_2) = \dim V_1 + \dim V_2$

证: 由推论 8.2, $V_1/_{V_1 \cap V_2} \simeq (V_1 + V_2)/_{V_2}$

由定理 8.2, $\dim V_1/_{V_1 \cap V_2} = \dim (V_1 + V_2)/_{V_2}$

由命题 5.1, $\dim V_1 - \dim(V_1 \cap V_2) = \dim(V_1 + V_2) - \dim V_2$ ■

§1-8 节小结

设V是域F上的线性空间

$$
\text{线性空间}V\begin{cases}\text{坐标空间 } F^n\left(\text{如果}\dim V=n, V\simeq F^n\right)\\ \text{矩阵空间 } F^{m\times n}\\ \text{多项式空间 } F[x], F_n[x]\\ \text{函数空间 } \operatorname{Func}(S,F), \operatorname{Map}(S,V), \operatorname{Hom}(V,W)\\ \text{扩域 } \mathbb{C} \text{ 是 } \mathbb{R} \text{ 上和 } \mathbb{Q} \text{ 上的线性空间}\end{cases}
$$

子空间, 商空间, 直和分解

维数: 设$\dim V<\infty, V_1, V_2 U$是$V$的子空间

关于子空间的维数公式

$$\dim(V_1+V_2)+\dim(V_1\cap V_2)=\dim V_1+V_2$$

关于商空间的维数公式

$$\dim V/_U=\dim V-\dim U$$

关于直和分解的维数公式

$$V=U_1\oplus\cdots\oplus U_k\Rightarrow\dim V=\dim U_1+\cdots+\dim U_k$$

基底与坐标

$\dim V<\infty, \overrightarrow{e_1},\dots,\overrightarrow{e_n}$是$V$的基底

$$\vec{x}=\underbrace{(\overrightarrow{e_1},\dots,\overrightarrow{e_n})}_{\text{基底}}\underbrace{\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}}_{\text{坐标}}$$, 坐标关于基底是唯一的

设$\overrightarrow{\varepsilon_1},\dots,\overrightarrow{\varepsilon_n}$是$V$的另一组基

$\exists!$ 转换矩阵$A\in GL_n(F)$, 使得$(\overrightarrow{\varepsilon_1},\dots,\overrightarrow{\varepsilon_n})=(\overrightarrow{e_1},\dots,\overrightarrow{e_n})A$

坐标变换 设$\vec{x}=(\overrightarrow{\varepsilon_1},\dots,\overrightarrow{\varepsilon_n})\begin{pmatrix}x_1'\\ \vdots\\ x_n'\end{pmatrix}$, 则$\begin{pmatrix}x_1'\\ \vdots\\ x_n'\end{pmatrix}=A^{-1}\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}$

线性映射 $\varphi\in\operatorname{Hom}(V,W)$

$$\varphi\text{的实例}\begin{cases}\text{零映射, 恒同映射}\\ \text{商映射, 关于直和分解的投影}\\ \text{加法，数乘，复合}\end{cases}$$

φ的分解: $\varphi =$ 线性单射 $\circ$ 线性满射

φ的维数公式　设 $\dim V < \infty$

$\dim\ker\varphi + \dim\operatorname{im}\varphi = \dim V$

φ是单射 $\xLeftrightarrow{\text{无穷维也成立}} \ker\varphi = \{\vec{0}\} \Leftrightarrow \dim\operatorname{im}\varphi = \dim V$

当 $\dim W < \infty$

φ是满射 $\Leftrightarrow \dim\operatorname{im}\varphi = W \Leftrightarrow \dim V - \dim\ker\varphi = \dim W$

§9 对偶空间

本节中 V 是域 F 上有限维向量空间

【定义 9.1.1】对偶空间

$\mathrm{Hom}(V,F)$ 称为 V 的对偶空间，记为 V^*

§9.1 基底的对偶

【定理 9.1】对偶基等量唯一性

设 $\overrightarrow{e_1},\dots,\overrightarrow{e_n}$ 是 V 的一组基，

则 V^* 有唯一的一组基 $e_1^*,\dots,e_n^*$ 满足

$e_i^*\left(\overrightarrow{e_j}\right)=\delta_{ij},\qquad i,j\in\{1,\dots,n\}$

特别地，$dim\,V^*=dim\,V$

称 $e_1^*,\dots,e_n^*$ 为 $\overrightarrow{e_1},\dots,\overrightarrow{e_n}$ 的对偶基

证：由定理 8.1，$\quad \forall i\in\{1,\dots,n\},\exists!\,e_i^*\in V^*$

使得 $e_i^*\left(\overrightarrow{e_j}\right)=\delta_{ij},\qquad j=1,\dots,n$

只需验证 $e_1^*,\dots,e_n^*$是 V^*的基

设 $\alpha_1,\dots,\alpha_n\in F$ 使得 $\alpha_1e_1^*+\cdots+\alpha_ne_n^*=0^*$

其中 $0^*:V\to F,\qquad \vec{v}\mapsto 0$, 即 V^* 中的零元素

则 $\forall j\in\{1,\dots,n\}$

$$0=0^*\left(\overrightarrow{e_j}\right)=\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\overrightarrow{e_j}\right)\left(\overrightarrow{e_j}\right)=\sum_{i=1}^{n}\alpha_ie_i^*\left(\overrightarrow{e_j}\right)=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\delta_{ij}=\alpha_j$$

于是 $e_1^*,\dots,e_n^*$ 线性无关

设 $f \in V^*, \beta_i = f(\overrightarrow{e_i}), i = 1, \dots, n,$ 令 $g = \sum_{i=1}^{n} \beta_i e_i^*,$

$$\forall j \in \{1, \dots, n\}, g\left(\overrightarrow{e_j}\right) = \sum_{i=1}^{n} \beta_i e_i^*\left(\overrightarrow{e_j}\right) = \sum_{i=1}^{n} \beta_i \delta_{ij} = \beta_j = f(\overrightarrow{e_j})$$

由定理 8.1 可知 $f = g$

于是 $V^* = \langle e_1^*, \dots, e_n^* \rangle$，即 $e_1^*, \dots, e_n^*$ 是 V^*的一组基

$e_1^*, \dots, e_n^*$的唯一性由定理 8.1 中的唯一性直接给出。 ■

【例 9.1.1】**坐标空间的对偶基**

$$V = F^n, \overrightarrow{e_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \overrightarrow{e_n} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{令 } X_i: F^n \to F, \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mapsto x_i, \quad i = 1, \dots, n$$

可直接验证 $X_i \in V^*$ 且 $X_i\left(\overrightarrow{e_j}\right) = \delta_{ij}$

于是 $\overrightarrow{e_1}, \dots, \overrightarrow{e_n}$ 的对偶基是 $X_1, \dots, X_n$

【例 9.1.2】**多项式取某项系数**

$V = F_n[x],$ 基底 $1, x, \dots, x^{n-1}$

$$C_i: F_n[x] \to F, \quad P = \sum_{k=0}^{n-1} p_k x^k \mapsto p_i$$

可直接验证 $C_i \in V^*$ 且 $C_i\left(x^j\right) = \delta_{ij}$

$i, j \in \{0, 1, \dots, n-1\}$

$$\text{设 } D_i: F_n[x] \to F_n[x], \quad P \mapsto \frac{1}{i!}\frac{d^i p}{dx^i}, \quad i = 0, 1, \dots, n-1$$

$\varphi_0: F_n[x] \to F, \qquad P \mapsto p(0)$

下证$C_i = \varphi_0 \circ D_i$

由定理 8.1，只要验证 $\varphi_0 \circ D_i(x^j) = \delta_{ij}, \qquad i,j \in \{0,1,\dots,n-1\}$

当$j < i, D_i(x^j) = 0 \Rightarrow \varphi_0 \circ D_i(x^j) = 0$

当$j = i, D_i(x^j) = 1 \Rightarrow \varphi_0 \circ D_i(x^j) = 1$

当$j > i, D_i(x^j) = j(j-1)\cdots(j-i+1)x^{j-i} \Rightarrow \varphi_0 \circ D_i(x^j) = 0$

于是 $C_i = \varphi_0 \circ D_i$

设 $p = (x-1)(x^2+2) \in F_4[x]$, 求 p 中关于 x 的系数。

方法 1：$C_1(p) = C_1(x^3 - x^2 + 2x - 2) = 2$

方法 2：$\varphi_0 \circ D_1(p) = \varphi_0\big((x^2+2) + 2x(x-1)\big) = 2$

【命题 9.1】任意基的对偶基的矩阵表示

设$\overrightarrow{a_1}, \dots, \overrightarrow{a_n}$ 是 F^n的一组基，令 $A = (\overrightarrow{a_1}, \dots, \overrightarrow{a_n})$,

则 $\overrightarrow{a_1} \dots, \overrightarrow{a_n}$的对偶基是

$(a_1^*, \dots, a_n^*) = (X_1, \dots, X_n)(A^t)^{-1}$

证：设$A = (a_{ij})_{n\times n}, (a_1^*, \dots, a_n^*) = (X_1, \dots, X_n)B$

且 $B = (b_{kl})_{n\times n}$, 则$a_l^* = \sum_{k=1}^{n} b_{kl} X_k$,

$$\delta_{lj} = a_l^*(\overrightarrow{a_j}) = \sum_{k=1}^{n} b_{kl} X_k\left(\overrightarrow{a_j}\right) = \sum_{k=1}^{n} b_{kl} a_{kj}, \qquad l,j \in \{1,\dots,n\}$$

即 $B^t A = E \Rightarrow A^t B = E \Rightarrow B = (A^t)^{-1}$ ■

【例 9.1.3】求三个向量的对偶基例

在 F^3 中 求 $\overrightarrow{a_1}=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},\overrightarrow{a_2}=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\overrightarrow{a_3}=\begin{pmatrix}2\\0\\-1\end{pmatrix}$ 的对偶基 a_1^*,a_2^*,a_3^*

并求$a_1^*\begin{pmatrix}4\\2\\1\end{pmatrix}$

解：$A=(\overrightarrow{a_1},\overrightarrow{a_2},\overrightarrow{a_3})=\begin{pmatrix}1&0&2\\0&1&0\\1&0&-1\end{pmatrix},A^t=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\2&0&-1\end{pmatrix}$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&1&1&0&0\\0&1&0&0&1&0\\2&0&-1&0&0&1\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&1&1&0&0\\0&1&0&0&1&0\\0&0&-3&-2&0&1\end{array}\right)$$

$$\to\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&\frac{1}{3}&0&-\frac{1}{3}\\0&1&0&0&1&0\\0&0&-3&-2&0&1\end{array}\right)$$

$$\to\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&\frac{1}{3}&0&-\frac{1}{3}\\0&1&0&0&1&0\\0&0&1&\frac{2}{3}&0&-\frac{1}{3}\end{array}\right)$$

$$(a_1^*,a_2^*,a_3^*)=(X_1,X_2,X_3)\begin{pmatrix}\frac{1}{3}&0&-\frac{1}{3}\\0&1&0\\\frac{2}{3}&0&-\frac{1}{3}\end{pmatrix}$$

$$a_1^*=\frac{1}{3}X_1+\frac{2}{3}X_3,\qquad a_2^*=X_2,\qquad a_3^*=\frac{1}{3}X_1-\frac{1}{3}X_3$$

$$a_1^*\begin{pmatrix}4\\2\\1\end{pmatrix}=\frac{1}{3}X_1\begin{pmatrix}4\\2\\1\end{pmatrix}+\frac{2}{3}X_3\begin{pmatrix}4\\2\\1\end{pmatrix}=\frac{4}{3}+\frac{2}{3}=2$$

§9.2 线性关系的对偶描述

【引理 9.1】零向量的对偶性质

设 $\vec{v} \in V$, 则以下断言等价

$(i)\vec{v} = \vec{0}$

$(ii)\forall f \in V^*, f(\vec{v}) = \vec{0}$

(iii)设 $e_1^*, \ldots, e_n^*$ 是 V^* 的一组基， $e_1^*(\vec{v}) = \cdots = e_n^*(\vec{v}) = 0$

证：$(i) \Rightarrow (ii) \Rightarrow (iii)$显然

$(iii) \Rightarrow (i)$ 假设$\vec{v} \neq 0$, 则由 $\vec{v}$ 可扩充 V 的一组基 $\vec{v} = \overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \ldots, \overrightarrow{v_n}$

设 $v_1^*, \mathrm{v}_2^*, \ldots, v_n^*$ 是其对偶基，且

$v_1^* = \alpha_1 e_1^* + \alpha_2 e_2^* + \cdots \alpha_n e_n^*$

则 $1 = v_1^*(\vec{v}) = \alpha_1 e_1^*(\vec{v}) + \alpha_2 e_2^*(\vec{v}) + \cdots + \alpha_n e_n^*(\vec{v}) = 0$, 矛盾 ■

【推论 9.1】相等向量的对偶性质

设 $\vec{u}, \vec{v} \in V$, 则下列断言等价

$(i)\ \vec{u} = \vec{v}$

$(ii)\forall f \in V^*, f(\vec{u}) = f(\vec{v})$

(iii)设 $e_1^*, \ldots, e_n^*$ 是 V^* 的一组基，使得 $e_i^*(\vec{u}) = e_i^*(\vec{v}), \quad i = 1, \ldots, n$

证：$\because \vec{u} = \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u} - \vec{v} = 0$

$\therefore$ 推论 9.1 可由引理 9.1 直接得出。 ■

【引理 9.2】向量对偶矩阵求对偶的作用

设 $f_1,\dots,f_m\in V^*,\overrightarrow{v_1},\dots,\overrightarrow{v_k}\in V,$

$$A=\left(f_i\left(\overrightarrow{v_j}\right)\right)_{m\times k},\vec{v}=\alpha_1\overrightarrow{v_1}+\cdots+\alpha_k\overrightarrow{v_k},\qquad \alpha_1,\dots,\alpha_k\in F$$

则 $\begin{pmatrix} f_1(\vec{v}) \\ \vdots \\ f_m(\vec{v}) \end{pmatrix}=A\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_k \end{pmatrix}$

证：$\forall i\in\{1,\dots,m\}$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{A_i}\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_k \end{pmatrix}&=\left(f_i(\overrightarrow{v_1}),\dots,f_i(\overrightarrow{v_k})\right)\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_k \end{pmatrix}\\&=\alpha_1 f_i(\overrightarrow{x_1})+\cdots+\alpha_k f_i(\overrightarrow{x_k})\\&=f_i(\alpha_1\overrightarrow{x_1}+\cdots+\alpha_k\overrightarrow{x_k})\\&=f_i(\vec{x})\qquad\blacksquare\end{aligned}$$

【引理 9.3】向量对偶矩阵判断线性相关性

设 $\overrightarrow{v_1},\dots,\overrightarrow{v_k}\in V$, 则下列断言等价

$(i)\overrightarrow{v_1},\dots,\overrightarrow{v_k}$ 线性相关

(ii) $\forall f_1,\dots,f_k\in V^*$, 矩阵 $\left(f_i\left(\overrightarrow{v_j}\right)\right)_{k\times k}$ 不满秩

(iii) 设 $e_1^*,\dots,e_n^*$ 是 V^*的一组基，矩阵 $\left(e_i^*\left(\overrightarrow{v_j}\right)\right)_{n\times k}$ 的秩小于 k

证：$(i)\Rightarrow(ii)$ 令 $B=\left(f_i\left(\overrightarrow{v_j}\right)\right)_{k\times k}$

$\because\overrightarrow{v_1},\dots,\overrightarrow{v_k}$ 线性相关

$\therefore\exists\alpha_1,\dots,\alpha_k\in F$ 不全为零，使得 $\alpha_1\overrightarrow{v_1}+\cdots+\alpha_k\overrightarrow{v_k}=\vec{0}$

由引理 9.2，$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} f_1(\vec{0}) \\ \vdots \\ f_k(\vec{0}) \end{pmatrix}=B\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_k \end{pmatrix}\Rightarrow\operatorname{rank}B<k$

$(ii)\Rightarrow(iii)$ 设 $B=\left(e_i^*\left(\overrightarrow{v_j}\right)\right)_{n\times k}$

由(ii)可知 B 的任何 $k\times k$ 阶行列式都为零，于是 $\operatorname{rank}B<k$

$(iii) \Rightarrow (i)$ $\because \operatorname{rank} B < k$

$\therefore \exists \beta_1, \dots, \beta_k \in F$ 不全为零，使得 $B\begin{pmatrix}\beta_1\\ \vdots\\ \beta_k\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}$

由引理 9.2, $e_i^*(\beta_1\overrightarrow{v_1} + \cdots \beta_k\overrightarrow{v_k}) = \vec{0}, i = 1,2, \dots, n$

由引理 9.1, $\beta_1\overrightarrow{v_1} + \cdots + \beta_k\overrightarrow{v_k} = \vec{0}$

$\Rightarrow \overrightarrow{v_1}, \dots, \overrightarrow{v_k}$ 线性相关 ■

【推论 9.2】向量对偶矩阵判定基

设 $\dim V = n, \overrightarrow{v_1}, \dots, \overrightarrow{v_n} \in V$,

则 $\overrightarrow{v_1}, \dots, \overrightarrow{v_n}$ 是 V 的基 $\Leftrightarrow$ 矩阵 $\left(e_i^*(\overrightarrow{\mathrm{v_j}})\right)_{n\times n}$ 满秩

其中 $e_1^*, \dots, e_n^*$ 是 V^*的一组基

证：在引理 9.3 中取 $k = n$, 再用 (i)和 (iii)的等价性。

【定理 9.2】向量对偶基矩阵求生成空间维数

设 $\overrightarrow{v_1}, \dots, \overrightarrow{v_k} \in V$, $e_1^*, \dots, e_n^* \in V^*$是 V^* 的一组基

令$A = \left(e_i^*(\overrightarrow{v_j})\right)_{n\times k}$, 则 $\dim\langle \overrightarrow{v_1}, \dots, \overrightarrow{v_k}\rangle = \operatorname{rank} A$

证：设 $r = rank\, A$, 不妨设 $\overrightarrow{A^{(1)}}, \dots, \overrightarrow{A^{(r)}}$线性无关

令 $B = \left(\overrightarrow{A^{(1)}}, \dots, \overrightarrow{A^{(r)}}\right)_{n\times k}$, $\because \operatorname{rank} B = r$ $\therefore \overrightarrow{v_1}, \dots, \overrightarrow{v_r}$ 线性无关

[引理 9.3，(i) $\Leftrightarrow$ (iii)]

$\forall m \in \{r+1, \dots, k\}$, 令 $B_m = \left(\overrightarrow{A^{(1)}}, \dots, \overrightarrow{A^{(r)}}, \overrightarrow{A^{(m)}}\right)$

则 $\operatorname{rank} B_m = r < r + 1$, 于是 $\overrightarrow{v_1}, \dots, \overrightarrow{v_r}, \overrightarrow{v_m}$ 线性相关

$\Rightarrow \overrightarrow{\mathrm{v_m}} \in \langle \overrightarrow{v_1}, \dots, \overrightarrow{v_r}\rangle \Rightarrow \dim\langle \overrightarrow{v_1}, \dots, \overrightarrow{v_r}\rangle = r$ ■

【例 9.2.1】n 个 n-2 次多项式 n 个点值矩阵退化

设 $P_1, P_2, \dots, P_n \in F_{n-1}[x], \alpha_1, \dots, \alpha_n \in F$,

则 $\det\Big(P_i(\alpha_j)\Big)_{\substack{i=1,\dots,n \\ j=1,\dots,n}} = 0$

证：$f_{\alpha_i}: F_{n-1}[x] \to F, \qquad P(x) \mapsto P(\alpha_i)$

可直接验证 $f_{\alpha_i} \in F_{n-1}[x]^*$

$\because \dim F_{n-1}[x] = n-1 \quad \therefore P_1, \dots, P_n$ 线性相关

$\Rightarrow \det\Big(P_i(\alpha_j)\Big)_{\substack{i=1,\dots,n \\ j=1,\dots,n}} = 0 \quad$ [引理 9.3, (i) $\Leftrightarrow$ (iii)]

§9.3 自然同构

【定义 9.3.1】重对偶

设 $\vec{v} \in V$, 定义 $\varepsilon_{\vec{v}}: V^* \to F, \quad f \mapsto f(\vec{v})$

$\forall \alpha, \beta \in F, \quad f, g \in V^*$

$$\begin{aligned}\varepsilon_{\vec{v}}(\alpha f + \beta g) &= (\alpha f + \beta g)(\vec{v}) = \alpha f(\vec{v}) + \beta g(\vec{v}) \\ &= \alpha \varepsilon_{\vec{v}}(f) + \beta \varepsilon_{\vec{v}}(g)\end{aligned}$$

于是 $\varepsilon_{\vec{v}}$ 是从 V^* 到 F 的线性函数，即 $\varepsilon_{\vec{v}} \in V^{**}$

注：上述验证并未用到 f, g 是线性函数，事实上，令 $s \in S$

$\varepsilon_s: \mathrm{Func}(S, F) \to F, \quad f \mapsto f(s)$ 是线性函数。

【定理 9.3】重对偶空间同构原空间

$\varphi: V \to V^{**}, \quad \vec{v} \mapsto \varepsilon_{\vec{v}}$ 是线性同构。

证：由 $\varepsilon_{\vec{v}}$ 的定义，φ 是良定义的

$\forall \alpha, \beta \in F, \quad \vec{u}, \vec{v} \in V,$

$\varphi(\alpha \vec{u} + \beta \vec{v}) = \varepsilon_{\alpha \vec{u} + \beta \vec{v}}$

$\forall f \in V^*, \quad \varepsilon_{\alpha \vec{u} + \beta \vec{v}}(f) = f(\alpha \vec{u} + \beta \vec{v})$

$\because f$ 线性 $\therefore \varepsilon_{\alpha \vec{u} + \beta \vec{v}}(f) = \alpha f(\vec{u}) + \beta f(\vec{v}) = \alpha \varepsilon_{\vec{u}}(f) + \beta \varepsilon_{\vec{v}}(f)$

$\Rightarrow \varepsilon_{\alpha \vec{u} + \beta \vec{v}} = \alpha \varepsilon_{\vec{u}} + \beta \varepsilon_{\vec{v}}$

$\Rightarrow \varphi(\alpha \vec{u} + \beta \vec{v}) = \alpha \varphi(\vec{u}) + \beta \varphi(\vec{v})$

由定理 5.1，要证 φ 是单射，只要证 $\varphi(\vec{v}) = 0^{**} \Rightarrow \vec{v} = \vec{0}$

$\left[\text{其中} 0^{**} \text{是} V^{**} \text{中的零元}\right]$

设 $e_1^*, \dots, e_n^*$ 是 V^* 的一组基

$0 = 0^{**}(e_i^*) = \varepsilon_{\vec{v}}(e_i^*) = e_i^*(v), \quad i = 1, \dots, n$

由引理 9.1, $\quad \vec{v} = \vec{0}.$

$\therefore\ \varphi$ 是单射

由线性映射维数公式 $\dim \operatorname{im} \varphi = \dim V$

由定理 9.1 $\dim \operatorname{im} \varphi = \dim V^{**} \Rightarrow \operatorname{im} \varphi = V^{**}$

即 φ 是满射，于是 φ 是线性同构。 ■

注：φ 的定义域基底选取无关，因而 φ 是自然同构

即V与V^{**} 自然同构。

【推论 9.3】与对偶基正交原基唯一存在性

设 $e_1^*, \dots, e_n^*$ 是 V^* 的基，

则$\exists!$ 基底 $\overrightarrow{e_1}, \dots, \overrightarrow{e_n} \in V$, 使得$e_i^*\left(\overrightarrow{e_j}\right) = \delta_{ij}$, $\quad i, j \in \{1, \dots, n\}$

证：由定理 9.1，$\exists!$ 基底 $e_1^{**}, \dots, e_n^{**}$, 使得$e_j^{**}(e_i^*) = \delta_{ij}$

又 $\forall j \in \{1, \dots, n\}$, $\quad \exists! \overrightarrow{e_j} \in V$, 使得$e_j^{**} = \varepsilon_{\overrightarrow{e_j}}$

$e_j^{**}(e_i^*) = \varepsilon_{\overrightarrow{e_j}}(e_i^*) = e_i^*\left(\overrightarrow{e_j}\right) = \delta_{ij}$

$\because \varphi$是线性同构 $\therefore \overrightarrow{e_1}, \dots, \overrightarrow{e_n}$ 线性无关 于是 $\overrightarrow{e_1}, \dots, \overrightarrow{e_n}$ 是 V 的基。■

【推论 9.4】基对偶矩阵测对偶生成空间维数

设$f_1, \dots, f_k \in V^*, \overrightarrow{e_1}, \dots, \overrightarrow{e_n}$ 是 V 的基，则

$\dim\langle f_1, \dots, f_k\rangle = \operatorname{rank}\left(f_j(\overrightarrow{e_i})\right)_{\substack{i=1,\dots,n \\ j=1,\dots k}}$

证：$\because \overrightarrow{e_1}, \dots, \overrightarrow{e_n}$ 是 V 的基，$\therefore \varepsilon_{\overrightarrow{e_1}}, \dots, \varepsilon_{\overrightarrow{e_n}}$是 V^{**} 的基

由定理 9.2

$\dim\langle f_1, \dots, f_k\rangle = \operatorname{rank}\left(\varepsilon_{\overrightarrow{e_i}}(f_j)\right)_{n\times k} = \operatorname{rank}\left(f_j(\overrightarrow{e_i})\right)_{\substack{i=1,\dots,n \\ j=1,\dots k}}$

§9.4 子空间的对偶

【定义 9.4.1】零化子空间

设 $U \subset V$ 是子空间，令 $U^{\circ} = \{f \in V^{*} | \forall u \in U, f(\vec{u}) = 0\}$

称 U° 是 U 的零化(子空间)

验证：U° 是 V^{*} 的子空间.

$\forall \alpha, \beta \in F, \quad f, g \in U^{\circ}, \quad \forall \vec{u} \in U$

$\alpha f + \beta g(\vec{u}) = \alpha f(\vec{u}) + \beta g(\vec{u}) = 0 \quad \blacksquare$

【例 9.4.1】三维零化子空间例

设 $V = F^3, \overrightarrow{u_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \overrightarrow{u_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, U = \langle \overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2} \rangle$

计算 U° 的一组基。

解：设 $f = \alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + \alpha_3 X_3$

则$f \in U^{\circ} \Leftrightarrow f(\overrightarrow{v_1}) = f(\overrightarrow{v_2}) = 0$

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 = 0 \\ \alpha_1 + \alpha_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 = t \\ \alpha_2 = -t \\ \alpha_3 = -t \end{cases} \quad t \in F$$

于是 $U^{\circ} = \langle X_1 - X_2 - X_3 \rangle$

【定义 9.4.2】解空间

设 $W \subset V^{*}$ 是子空间，定义$W^{\circ} = \{\vec{v} \in V | \forall f \in W, f(\vec{v}) = 0\}$

称 W° 是 W的解空间(本质是零化子)

验证：W° 是V中的子空间

设$\alpha,\beta\in F,\quad \vec{u},\vec{v}\in V,\quad f\in W$

$f(\alpha\vec{u}+\beta\vec{v})=\alpha f(\vec{u})+\beta f(\vec{v})=0\Rightarrow \alpha\vec{u}+\beta\vec{v}\in W^{\circ}$ ■

注：需要f是线性函数

【例 9.4.2】三维解空间例

$W=\langle X_1-X_2-X_3\rangle\in(F^3)^*$, 求 W° 的一组基

设 $\vec{x}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}\in F^3$ 则

$\vec{x}\in W^{\circ}\Leftrightarrow x_1-x_2-x_3=0\Leftrightarrow W^{\circ}=\left\langle\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\right\rangle$

【例 9.4.3】零化子空间及解空间简单性质

$\{\vec{0}\}^{\circ}=V^*$ (显然), $\quad \{0^*\}^{\circ}=V$ (显然)

$V^{\circ}=\{0^*\}\qquad (V^*)^{\circ}=\{\vec{0}\}$[引理 9.1]

【例 9.4.4】零化子空间反包含关系

设 $U_1\subset U_2\subset V$ 是子空间，$W_1\subset W_2\subset V^*$是子空间

则 $U_1{}^{\circ}\supset U_2{}^{\circ}$，$W_1{}^{\circ}\supset W_2{}^{\circ}$ $(inclusion-reversing)$

证：$f\in U_2{}^{\circ}\Rightarrow\forall\vec{v}\in U_2, f(\vec{v})=0$

$\because U_1\subset U_2\quad\therefore\forall\vec{v}\in U_1, f(\vec{v})=0$

$\Rightarrow f\in U_1{}^{\circ}\Rightarrow U_2{}^{\circ}\subset U_1{}^{\circ}$

同理 $W_1{}^{\circ}\supset W_2{}^{\circ}$ ■

【定理 9.4】零化子维数公式

(i)设 U 是 V 的子空间，则 $\dim U+\dim U^{\circ}=\dim V$

(ii)设W是V^{*}的子空间，则$\dim W+\dim W^{\circ}=\dim V$

下证明(ii)，　(i)可类似证

设 $e_1^*,\ldots,e_d^*$ 是W的一组基，

把它扩充为 V^*的一组基 $e_1^*,\ldots,e_d^*,e_{d+1}^*,\ldots,e_n^*$

由推论 9.3, $\exists\overrightarrow{e_1},\ldots,\overrightarrow{e_n}\in V$是基底

且$e_i^*\left(\overrightarrow{e_j}\right)=\delta_{ij}$,　$i,j\in\{1,\ldots,n\}$

于是$\overrightarrow{e_{d+1}},\ldots,\overrightarrow{e_n}\in W^{\circ}$

$\left[\because \forall e_i\in\{1,\ldots,d\}, j\in\{d+1,\ldots,n\}, e_i^*\left(\overrightarrow{e_j}\right)=0\right]$

设 $\vec{w}\in W^{\circ}$, 则 $\exists\beta_1,\ldots,\beta_n\in F$使得

$\vec{w}=\beta_1\overrightarrow{e_1}+\cdots+\beta_d\overrightarrow{e_d}+\beta_{d+1}\overrightarrow{e_{d+1}}+\cdots+\beta_n\overrightarrow{e_n}$

设 $i\in\{1,\ldots,d\}$

$0=e_i^*(\vec{w})=\beta_i\Rightarrow\vec{w}\in\langle\overrightarrow{e_{d+1}},\ldots,\overrightarrow{e_n}\rangle$

$\Rightarrow W^{\circ}=\langle\overrightarrow{e_{d+1}},\ldots,\overrightarrow{e_n}\rangle\Rightarrow\dim W^{\circ}=n-d$　■

【定理 9.5】重零化子为自身

(i)设$U\subset V$是子空间，则 $(U^{\circ})^{\circ}=U$

(ii)设 $W\subset V^*$是子空间，则$(W^{\circ})^{\circ}=W$

证：(i) $\forall\vec{u}\in U, f\in U^{\circ}, f(\vec{u})=0$

$\Rightarrow U\subset(U^{\circ})^{\circ}$

由定理 9.4，$\dim U+\dim U^{\circ}=\dim V=\dim U^{\circ}+\dim(U^{\circ})^{\circ}$

$\Rightarrow\dim U=\dim(U^{\circ})^{\circ}\Rightarrow U=(U^{\circ})^{\circ}$

(ii) 类似　■

【命题 9.2】零化与交和反复合运算

(i)设 $U_1,U_2\subset V$ 是子空间

则 $(U_1+U_2)^\circ=U_1{}^\circ\cap U_2{}^\circ$, $\quad (U_1\cap U_2)^\circ=U_1{}^\circ+U_2{}^\circ$

(ii)设 $W_1,W_2\subset V^*$是子空间

则 $(W_1+W_2)^\circ=\mathrm{W}_1{}^\circ\cap W_2{}^\circ$, $\quad (W_1\cap W_2)^\circ=W_1{}^\circ+W_2{}^\circ$

【命题 9.3】零化子直和分解对偶一致性

(i)设 $V=U_1\oplus U_2$是直和分解

则$V^*=U_1{}^\circ\oplus U_2{}^\circ$

(ii)设 $V^*=W_1\oplus W_2$是直和分解

则 $V=W_1{}^\circ\oplus W_2{}^\circ$

证明略

【例 9.4.5】迹零空间仅是单位阵的不变空间

①设 $M_{ij}\in M_n(F)$, 其中 i 行 j 列处元素是 1，其他元素是 0，

$i,j\in\{1,\dots,n\}$

设$A\in M_n(F),A=\left(a_{ij}\right)_{n\times n}$

则 $A=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}M_{ij}$

② $M_{ij}A=\begin{pmatrix} 0_{1\times n} & \\ \vdots & \\ 0_{1\times n} & \\ \overrightarrow{A_j} & [\text{第}i\text{行}] \\ 0_{1\times n} & \\ \vdots & \\ 0_{1\times n} & \end{pmatrix}$

$$AM_{ij}=\left(\vec{0},\ldots,\vec{0},\underset{[\text{第}j\text{列}]}{\vec{A}^{(i)}},\vec{0},\ldots,\vec{0}\right)\qquad[\text{自己验证}]$$

③ $\operatorname{tr}(M_{ij}A)=a_{ij}\quad\operatorname{tr}(AM_{ij})=a_{ji}$

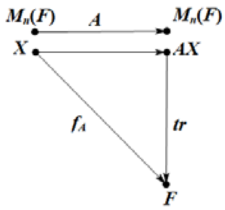
由②直接可得

④设 $U=\{B\in M_n(F)\mid\operatorname{tr}B=0\}$

则 U 是 $M_n(F)$ 的 n^2-1 维空间 $\quad[\text{已证}]$

⑤设$A\in M_n(F)$,使得 $\forall B\in U, AB\in U$

证明：$A=\lambda E$,其中$\lambda\in F$



法 1

设$f_A: M_n(F)\to F,\qquad x\mapsto\operatorname{tr}AX$

则$f_A\in M_n(F)^*$

$\forall B\in U, f_A(B)=\operatorname{tr}AB=0$,于是 $f_A\in U^\circ$

由定理 9.4 和④，$\dim U^\circ=1$,而$f_E\in U^\circ$且$f_E\neq 0^*$

于是$\exists\lambda\in F$使得$f_A=\lambda f_E$,

$f_A(M_{ij})=\operatorname{tr}AM_{ij}=a_{ji},\qquad \lambda f_E(M_{ij})=\lambda\operatorname{tr}(M_{ij})=\lambda\delta_{ij}$

$\Rightarrow a_{ij}=\lambda\delta_{ij},\qquad i,j\in\{1,\ldots,n\}$

$\Rightarrow A=\lambda E\qquad\blacksquare$

法 2

设 $X=(x_{ij})_{n\times n}\in M_n(F)$

则 $X\in U\Leftrightarrow x_{11}+\cdots+x_{nn}=0$

即 U 是$x_{11}+\cdots+x_{nn}=0$ 的解空间

设$A=(a_{ij})_{n\times n}$,则 $AX=\left(\sum_{k=1}^{n}a_{ik}x_{kj}\right)_{\substack{i=1,\ldots,n\\ j=1,\ldots,n}}$

$$\operatorname{tr} AX = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_{ik}x_{ki}$$

$$\operatorname{tr} AX = 0 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_{ik}x_{ki} = 0$$

设A满足$\forall x \in U, \operatorname{tr} AX = 0$

于是方程组$\begin{cases} x_{11} + \cdots + x_{nn} = 0 \\ \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_{ik}x_{ki} = 0 \end{cases}$

其解空间为 U 且 $\dim U = n^2 - 1$, 于是该方程组系数矩阵C的秩为 1

从而 $\exists \lambda \in F$ 使得 $\overrightarrow{C_2} = \lambda \overrightarrow{C_1} \Rightarrow a_{ij} = 0, i \neq j, a_{ij} = \lambda, i = 1, \ldots, n$

即 $A = \lambda E$ ■

【例 9.4.6】函数的微分

设$f: \mathbb{R}^n \Rightarrow \mathbb{R}$, $\overrightarrow{x_0} \in \mathbb{R}^n$, f在$\overrightarrow{x_0}$点可微

如果$\exists L \in (\mathbb{R}^n)^*$ 使得

$$[*] \lim_{|\vec{v}| \to 0} \frac{f(\overrightarrow{x_0} + \vec{v}) - f(\overrightarrow{x_0}) - L(\vec{v})}{|\vec{v}|} = 0$$

如果[*]成立，且$\vec{w} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\vec{0}\}, |\vec{w}| = 1$

f 沿 $\vec{w}$ 的方向导数是$L(\vec{w})$,

验证：$\lim_{t \to 0} \frac{f(\overrightarrow{x_0} + t\vec{w}) - f(\overrightarrow{x_0}) - L(t\vec{w})}{t} = 0$

$$\Rightarrow \lim_{t \to 0} \frac{f(\overrightarrow{x_0} + t\vec{w}) - f(\overrightarrow{x_0})}{t} = L(\vec{w})$$

L 在标准基$\overrightarrow{e_1}, \ldots, \overrightarrow{e_n}$ 的对偶基 $e_1^*, \ldots, e_n^*$ 下的坐标是

$L = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial x_i}(\overrightarrow{x_0}) e_i^*$ 称为f在$\overrightarrow{x_0}$处的微分.

§10 双线性型

§10.1 什么是双线性函数

【回忆】线性函数

线性函数：给定 $\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n\in F$,

$$f:F^n\to F,\begin{pmatrix}x_1\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}\mapsto \alpha_1x_1+\cdots+\alpha_nx_n=(x_1,\dots,x_n)\begin{pmatrix}\alpha_1\\\vdots\\\alpha_n\end{pmatrix}=(\alpha_1,\dots,\alpha_n)$$

$$=(\alpha_1,\dots,\alpha_n)\begin{pmatrix}x_1\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}$$

抽象：设 V 是 F 上的 n 维线性空间，$f:V\to F$ 是线性函数

如果 $\forall\alpha,\beta\in F,\vec{x},\vec{y}\in V,f(\alpha\vec{x}+\beta\vec{y})=\alpha f(\vec{x})+\beta f(\vec{y})$

对偶：$f\in V^*$

双线性函数：给定 $\alpha_{ij}\in F,\qquad i,j\in\{1,\dots,n\}$

$$f:F^n\times F^n\to F,\qquad \begin{pmatrix}x_1\\\vdots\\x_n\end{pmatrix},\begin{pmatrix}y_1\\\vdots\\y_n\end{pmatrix}\mapsto\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\alpha_{ij}x_iy_j$$

令 $\vec{x}=\begin{pmatrix}x_1\\\vdots\\x_n\end{pmatrix},\vec{y}=\begin{pmatrix}y_1\\\vdots\\y_n\end{pmatrix}$

$$f(\vec{x},\vec{y})=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\alpha_{ij}x_iy_j=(x_1,\dots,x_n)A\begin{pmatrix}y_1\\\vdots\\y_n\end{pmatrix}$$

其中 $A=(\alpha_{ij})_{\substack{i=1,\dots,n\\j=1,\dots,n}}\in M_n(F)$ $\quad$ [通过矩阵乘法可直接验证]

当 $\vec{y}$ 取 F^n 中某个向量 $\vec{v}$，让 $\vec{x}$ 变化时，$f(\vec{x},\vec{v})$是关于 $\vec{x}$ 的线性函数

同样 $f(\vec{x},\vec{y})$是关于 $\vec{y}$ 的线性函数

设 $q(\vec{x})=f(\vec{x},\vec{x})=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\alpha_{ij}x_ix_j$

q是从 V 到 F 的齐二次函数，它不是线性的。

【例 10.1.1】线性函数举例

$f:\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R},\quad (x,y)\mapsto xy$ 是双线性的

$q:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\quad x\mapsto x^2$ 不是线性的

本章余下的内容：双线性函数，二次函数

核心工具：矩阵的合同

§10.2 双线性型的定义和性质

设 V 是 F 上的线性空间

【定义 10.2.1】双线性型

$f:V\times V\to F$ 称为 V 上的双线性型，

如果 $\forall\alpha,b\in F,\vec{x},\vec{y},\vec{z}\in V$,满足

$f(\alpha\vec{x}+\beta\vec{z},\vec{y})=\alpha f(\vec{x},\vec{y})+\beta f(\vec{z},\vec{y})$

$f(\vec{x},\alpha\vec{y}+\beta\vec{z})=\alpha f(\vec{x},\vec{y})+\beta f(\vec{x},\vec{z})$

【例 10.2.1】双线性型基本性质

设 f 是 V 上的双线性型

(i)证明：$\forall\vec{x}\in V,f\left(\vec{0},\vec{x}\right)=f\left(\vec{x},\vec{0}\right)=0$

(ii)设 $\alpha,\beta\in F,\vec{u},\vec{v},\vec{x},\vec{y}\in V$,展开 $f(\alpha\vec{x},\beta\vec{y})$和 $f(\vec{u}+\vec{v},\vec{x}+\vec{y})$

解:$(i)f\left(\vec{0},\vec{x}\right)=f\left(\vec{0}+\vec{0},\vec{x}\right)=f\left(\vec{0},\vec{x}\right)+f\left(\vec{0},\vec{x}\right)\Rightarrow f\left(\vec{0},\vec{x}\right)=0$

同理 $f\left(\vec{x},\vec{0}\right)=0$

$(ii)f(\alpha\vec{x}+\beta\vec{y})=\alpha f(\vec{x},\beta\vec{y})=\alpha\beta f(\vec{x},\vec{y})$

$$f(\vec{u}+\vec{v},\vec{x}+\vec{y})=f(\vec{u},\vec{x}+\vec{y})+f(\vec{v},\vec{x}+\vec{y})$$
$$=f(\vec{u},\vec{x})+f(\vec{u},\vec{y})+f(\vec{v},\vec{x})+f(\vec{v},\vec{y})$$

【例 10.2.2】乘积双线性型

设 $l_1,l_2\in V^*$,则

$f(\vec{x},\vec{y})=l_1(\vec{x})l_2(\vec{y})$ 是双线性型

任取 $\vec{v}\in V,l_1(\vec{v})\in F,f(\vec{v},\vec{y})=l_1(\vec{v})l_2(\vec{y})$关于 $\vec{y}$ 是线性的。

同理，当 $\vec{y}$ 取 V 的任一向量时 f 关于 $\vec{x}$ 也是线性的。

§10.3 双线性型的矩阵表示

【定义 10.3.1】双线性型的矩阵

设 V 是有限维线性空间,$\overrightarrow{e_1},\dots,\overrightarrow{e_n}$ 是 V 的一组基,f 是 V上双线性型.

令 $\vec{x}=x_1\overrightarrow{e_1}+\cdots+x_n\overrightarrow{e_n},\vec{y}=y_1\overrightarrow{e_1}+\cdots+y_n\overrightarrow{e_n}$

$$f(\vec{x},\vec{y})=f\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\overrightarrow{e_i},\vec{y}\right)=\sum_{i=1}^{n}x_i f(\overrightarrow{e_i},\vec{y})=\sum_{i=1}^{n}x_i f\left(\overrightarrow{e_i},\sum_{j=1}^{n}y_j\overrightarrow{e_j}\right)$$

$$=\sum_{i=1}^{n}x_i\left(\sum_{j=1}^{n}y_j f\left(\overrightarrow{e_i},\overrightarrow{e_j}\right)\right)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}f\left(\overrightarrow{e_i},\overrightarrow{e_j}\right)x_i y_j$$

令 $A=\left(f\left(\overrightarrow{e_i},\overrightarrow{e_j}\right)\right)_{\substack{i=1,\dots,n\\ j=1,\dots,n}}$ 可直接验证 $f(\vec{x},\vec{y})=(x_1,\dots,x_n)A\begin{pmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix}$

称 A 是 f 在 $\overrightarrow{e_1},\dots,\overrightarrow{e_n}$ 下的矩阵

注 1: 设 $B\in M_n(F)$, 使得 $\forall\vec{x},\vec{y}\in V, f(\vec{x},\vec{y})=(x_1,\dots,x_n)B\begin{pmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix}$

则 $f\left(\overrightarrow{e_i},\overrightarrow{e_j}\right)=\left(0,\dots,0,1\left[\text{第}i\text{列}\right],0,\dots,0\right)B\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 0\\ 1\left[\text{第}j\text{行}\right]\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}=b_{ij}$

$\Rightarrow B=A$

注 2: 设 $A\in M_n(F)$, $\quad\vec{x}=\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix},\vec{y}=\begin{pmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix}\in F^n$

定义 $f:F^n\times F^n\to F,\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix},\begin{pmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix}\mapsto(x_1,\dots,x_n)A\begin{pmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix}$

则 f 是 F^n 上双线性型，其在标准基 $\overrightarrow{e_1},\dots,\overrightarrow{e_n}$ 下的矩阵是 A

【例 10.3.1】双线性型的矩阵例

设 F^3 中 $\vec{x}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix},\vec{y}=\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}$,双线性型 $f(\vec{x},\vec{y})=x_1y_2-x_2y_3$

求 F 在标准基下的矩阵 A

解:$A=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&-1\\0&0&0\end{pmatrix}$

【定理 10.1】双线性型矩阵换基公式

设 V 是 F 上有限维线性空间,f 是 V 上的双线性型

f 在基底 $\overrightarrow{e_1},\dots,\overrightarrow{e_n}$ 下的矩阵为 A,在基底 $\overrightarrow{\varepsilon_1},\dots,\overrightarrow{\varepsilon_n}$ 下的矩阵为 B

设 C 是从 $\overrightarrow{e_1},\dots,\overrightarrow{e_n}$ 到 $\overrightarrow{\varepsilon_1},\dots,\overrightarrow{\varepsilon_n}$ 的转换矩阵，则

$B=C^tAC$,特别地 $rank\,B=rank\,A$

证:设 $\vec{x}=x_1\overrightarrow{e_1}+\cdots+x_n\overrightarrow{e_n}=x_1'\overrightarrow{\varepsilon_1}+\cdots+x_n'\overrightarrow{e_n}$

$\vec{y}=y_1\overrightarrow{e_1}+\cdots+y_n\overrightarrow{e_n}=y_1'\overrightarrow{\varepsilon_1}+\cdots+y_n{}'\overrightarrow{\varepsilon_n}$

由推论 7.1 $\begin{pmatrix}x_1\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}=C\begin{pmatrix}x_1{}'\\\vdots\\x_n{}'\end{pmatrix},\begin{pmatrix}y_1\\\vdots\\y_n\end{pmatrix}=C\begin{pmatrix}y_1{}'\\\vdots\\y_n{}'\end{pmatrix}$

$f(\vec{x},\vec{y}=(x_1,\dots,x_n)A\begin{pmatrix}y_1\\\vdots\\y_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_1\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}^tA\begin{pmatrix}y_1\\\vdots\\y_n\end{pmatrix}=(x_1',\dots,x_n')C^tAC\begin{pmatrix}y_1{}'\\\vdots\\y_n{}'\end{pmatrix}$

于是 $B=C^tAC$ $\quad\because C$ 可逆 $\therefore rank\,B=rank\,A$ ■

【定义 10.3.2】双线性型的秩

设 f 是 V 上的双线性型，矩阵 A 是 f 在 V 下某组基的矩阵

则 A 的秩也称为 f 的秩，记为 $rank\,f$

如果 $rank\,f=dim\,V$,则称 f 是非退化的。

【例 10.3.2】双线性型秩为 0 或 1 的性质

设 f 是 V 上的双线性型,

$(i)\, rank\, f = 0 \Leftrightarrow \forall \vec{x}, \vec{y} \in V, f(\vec{x}, \vec{y}) = 0$

$(ii)\, rank\, f = 1 \Leftrightarrow \exists l_1, l_2 \in V^* \setminus \{0^*\}$ 使得 $f(\vec{x}, \vec{y}) = l_1(\vec{x}) l_2(\vec{y})$

证: 设 V 的一组基是 $\overrightarrow{e_1}, \dots, \overrightarrow{e_n}$, f 在该基下的矩阵是 A

$\vec{x}, \vec{y} \in V$, 且 $\vec{x} = x_1\overrightarrow{e_1} + \cdots + x_n\overrightarrow{e_n}$, $\vec{y} = y_1\overrightarrow{e_1} + \cdots + y_n\overrightarrow{e_n}$

$(i)\, rank\, f = 0 \Leftrightarrow rank\, A = 0 \Leftrightarrow A = O_{n\times n}$

$$\Leftrightarrow f(\vec{x}, \vec{y}) = (x_1, \dots, x_n) O_{n\times n} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = 0$$

$(ii) \Rightarrow: rank\, f = 1 \Rightarrow rank\, A = 1$

$$\Rightarrow A = \left(\lambda_1 \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}, \lambda_2 \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}, \dots, \lambda_n \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} \right)$$

其中 $\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \lambda_1, \dots, \lambda_n$不全为零

于是$A = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$

$$f(\vec{x}, \vec{y}) = (x_1, \dots, x_n) A \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} =$$

$$(x_1, \dots, x_n) \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

$$= (\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n)(\lambda_1 y_1 + \cdots + \lambda_n y_n)$$

令 $l_1: V \to F, \vec{x} \mapsto \alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n \overrightarrow{x_n}$

$l_2: V \to F, \vec{y} \mapsto \lambda_1 y_1 + \cdots + \lambda_n y_n$

得$f(\vec{x}, \vec{y}) = l_1(\vec{x}) l_2(\vec{y})$

$\Leftarrow: l_1: V \to F, \vec{x} \mapsto \alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n, \qquad \alpha_1, , \ldots, \alpha_n$不全为零

$l_2: V \to F, \vec{y} \mapsto \lambda_1 y_1 + \cdots + \lambda_n y_n, \qquad \lambda_1, \ldots, \lambda_n$不全为零

$$f(\vec{x}, \vec{y}) = (x_1, \ldots, x_n) \underbrace{\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)}_{A} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

$\because \alpha_1, \ldots, \alpha_n, \lambda_1, \ldots, \lambda_n$不全为零

$\therefore rank\, A = 1$

§10.4 矩阵的合同

【定义 10.4.1】矩阵的合同

设 $A,B\in M_n(F)$,如果存在 $C\in GL_n(F)$

使得 $B=C^tAC$,则称 B与 A 合同,记为 $B\sim_c A$

验证: $\sim_c$是等价关系

$\forall A\in M_n(F), A=EAE=E^tAE\Rightarrow A\sim_c A$

设 $B\sim_c A$, 则 $\exists C\in GL_n(F)$, 使得 $B=C^tAC$,

于是$(C^t)^{-1}BC^{-1}=A$

$\because (C^t)^{-1}=(C^{-1})^t \quad \therefore A=(C^{-1})^tBC^{-1}$

$\Rightarrow A\sim_c B$

设 $A_1,A_2,A_3\in M_n(F), A_1\sim_c A_2, A_2\sim_c A_3$

则 $\exists C_1,C_2\in GL_n(F)$, 使得 $A_1=C_1^tA_2C_1, A_2=C_2^tA_3C_2$

则 $A_1=C_1^tC_2^tA_3C_2C_1=(C_2C_1)^tA_3C_2C_1\Rightarrow A_1\sim_c A_3$ ■

【定理 10.2】合同换基存在定理

设 f 是 V 上的双线性型，A 是 f 在 V 的基底$\overrightarrow{e_1},\dots,\overrightarrow{e_n}$下的矩阵

设 $B\sim_c A$, 则存在 V的一组基 $\overrightarrow{\varepsilon_1},\dots,\overrightarrow{\varepsilon_n}$, 使得 f 在该基下的矩阵为 B

证: $\because B\sim_c A \quad \therefore \exists C\in GL_n(F)$使得 $B=C^tAC$

令 $(\overrightarrow{\varepsilon_1},\dots,\overrightarrow{\varepsilon_n})=(\overrightarrow{e_1},\dots,\overrightarrow{e_n})C$,

因为 C 可逆, 所以 $\overrightarrow{\varepsilon_1},\dots,\overrightarrow{\varepsilon_n}$ 是V的基 [定理 7.1]

由定理 10.1 f 在 $\overrightarrow{\varepsilon_1},\dots,\overrightarrow{\varepsilon_n}$ 下的矩阵是 B ■

注: 把双线性型 f 化为标准型

$\Leftrightarrow$ 在与 A 合同的矩阵中找出尽可能简单的矩阵

(0 尽可能多，非零元出现尽可能有规律)

§10.5 对称与斜对称双线性型

【定义 10.5.1】（斜）对称双线性型

设 f 是 V 上的双线性型，$\forall\vec{x},\vec{y}\in V$

如果 $f(\vec{x},\vec{y})=f(\vec{y},\vec{x})$,则称 f 是对称的

如果 $f(\vec{x},\vec{y})=-f(\vec{y},\vec{x})$,则称 f 是斜对称的

【记号】双线性型的记号

V 上所有双线性型的集合为记为 $\mathcal{L}_2(V,F)$

V 上所有对称双线性型的集合为记为 $\mathcal{L}_2^+(V,F)$

V 上所有斜对称双线性型的集合为记为 $\mathcal{L}_2^-(V,F)$

【命题 10.1】对称与斜对称双线性型直和分解

$\mathcal{L}_2(V,F)$是 F 上的线性空间,

$\mathcal{L}_2^+(V,F),\mathcal{L}_2^-(V,F)$是它的子空间，当 $char\,F\neq 2$ 时

$\mathcal{L}_2(V,F)=\mathcal{L}_2^+(V,F)\oplus L_2^-(V,F)$

证: 因为 $\mathcal{L}(V,F)\subset Func(V\times V,F)$

所以只要证明 $\mathcal{L}(V,F)$对线性运算封闭即可。

设 $\alpha,\beta\in F,f,g\in\mathcal{L}_2(V,F),h=\alpha f+\beta g$

$\forall\vec{x},\vec{y}\in V$, 固定 $\vec{x}=\overrightarrow{x_0},h(\overrightarrow{x_0},\vec{y})=\alpha f(\overrightarrow{x_0},\vec{y})+\beta g(\overrightarrow{x_0},\vec{y})$

$\because f(\overrightarrow{x_0},\vec{y}),g(x_0,\vec{y})$关于 $\vec{y}$ 是线性函数

$\therefore h(\overrightarrow{x_0},\vec{y})$关于 $\vec{y}$ 也是线性函数

同理，$h(\vec{x},\vec{y})$关于 $\vec{x}$ 也是 $h\in\mathcal{L}_2(V,F)$

设 $f,g\in\mathcal{L}_2^+(V,F)$,

则 $h(\vec{y},\vec{x})=\alpha f(\vec{y},\vec{x})+\beta g(\vec{y},\vec{x})=\alpha f(\vec{x},\vec{y})+\beta g(\vec{x},\vec{y})=h(\vec{x},\vec{y})$

由此可知 $h\in\mathcal{L}_2^+(V,F)$, $\mathcal{L}_2^+(V,F)$是子空间

同理 $\mathcal{L}_2^-(V,F)$是子空间

设 $char\,F\neq 2, f\in\mathcal{L}_2(V,F)$

$$f(\vec{x},\vec{y})=\underbrace{\frac{1}{2}\big(f(\vec{x},\vec{y})+f(\vec{y},\vec{x})\big)}_{\mathcal{L}_2^+(V,F)}+\underbrace{\frac{1}{2}\big(f(\vec{x},\vec{y})-f(\vec{y},\vec{x})\big)}_{\mathcal{L}_2^-(V,F)}$$

于是 $\mathcal{L}_2(V,F)=\mathcal{L}_2^+(V,F)+\mathcal{L}_2^-(V,F)$

设 $g\in\mathcal{L}_2^+(V,F)\cap\mathcal{L}_2^-(V,F)$

则 $g(\vec{x},\vec{y})=g(\vec{y},\vec{x})$且 $g(\vec{x},\vec{y})=-g(\vec{y},\vec{x})$

$\Rightarrow 2g(\vec{x},\vec{y})\Rightarrow g(\vec{x},\vec{y})=0$

$\Rightarrow\mathcal{L}_2(V,F)=\mathcal{L}_2^+(V,F)\oplus\mathcal{L}_2^-(V,F)$ ■

【命题 10.2】（斜）对称双线性型矩阵的性质

设 V 是有限维线性空间

$f\in L_2^+(V,F), A$ 是 f 在基底 $\overrightarrow{e_1},\dots,\overrightarrow{e_n}$ 下的矩阵

$(i) f\in L_2^+(V,F)\Leftrightarrow A$ 对称

$(ii) f\in L_2^-(V,F)\Leftrightarrow A$ 斜对称

证: $(i)\Rightarrow: f\in L_2^+(V,F)\Rightarrow\forall i,j\in\{1,\dots,n\}, f\big(\overrightarrow{e_i},\overrightarrow{e_j}\big)=f\big(\overrightarrow{e_j},\overrightarrow{e_i}\big)$

由 A 的定义可知，A对称

$\Leftarrow$: 设 A 对称, $\vec{x} = x_1\overrightarrow{e_1} + \cdots + x_n\overrightarrow{e_n}$, $\quad \vec{y} = y_1\overrightarrow{e_1} + \cdots + y_n\overrightarrow{e_n}$ 则

$$f(\vec{x},\vec{y}) = (x_1, \dots, x_n)A\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \left((x_1, \dots, x_n)A\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}\right)^t$$

$$= (y_1, \dots, y_n)A^t\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = (y_1, \dots, y_n)A\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = f(\vec{y},\vec{x})$$

(ii) *类似* ■

约定:从此到本章结束,V 是 F 上的有限维线性空间, 且 $\operatorname{char} F \neq 2$

§11 对称双线性型的规范基

【引理 11.1】对称双线性型的极化公式

设$f \in \mathcal{L}_2^+(V,F)$,则$\forall \vec{x},\vec{y} \in V$

$$f(\vec{x},\vec{y}) = \frac{1}{2}\big(f(\vec{x}+\vec{y},\vec{x}+\vec{y}) - f(\vec{x},\vec{x}) - f(\vec{y},\vec{y})\big)$$

特别地,如果f不是零映射,则$\exists \vec{v} \in V$使得$f(\vec{v},\vec{v}) \neq 0$

证:$\frac{1}{2}\big(f(\vec{x}+\vec{y},\vec{x}+\vec{y}) - f(\vec{x},\vec{x}) - f(\vec{y},\vec{y})\big)$

$= \frac{1}{2}\big(f(\vec{x},\vec{x}+\vec{y}) + f(\vec{y},\vec{x}+\vec{y}) - f(\vec{x},\vec{x}) - f(\vec{y},\vec{y})\big)$

$= \frac{1}{2}\big(f(\vec{x},\vec{x}) + f(\vec{x},\vec{y}) + f(\vec{y},\vec{x}) + f(\vec{y},\vec{y}) - f(\vec{x},\vec{x}) - f(\vec{y},\vec{y})\big)$

$= \frac{1}{2}\big(f(\vec{x},\vec{y}) + f(\vec{y},\vec{x})\big) = f(\vec{x},\vec{y})$

由极化公式右侧可知

当$f \neq 0$时,$\exists \vec{x},\vec{y}$,使得$\big(f(\vec{x}+\vec{y},\vec{x}+\vec{y}) - f(\vec{x},\vec{x}) - f(\vec{y},\vec{y})\big) \neq 0$

则$f(\vec{x}+\vec{y},\vec{x}+\vec{y}), f(\vec{x},\vec{x}), f(\vec{y},\vec{y})$至少有一个不为零

$\therefore \exists \vec{v} \in V$,使得$f(\vec{v},\vec{v}) \neq 0$ ■

【定理 11.1】对称双线性型可对角化

设$f \in L_2^+(V,F)$,则存在V的一组基$\overrightarrow{e_1},\dots,\overrightarrow{e_n}$,

使得f在$\overrightarrow{e_1},\dots,\overrightarrow{e_n}$下的矩阵是$\mathrm{diag}_n(\lambda_1,\dots,\lambda_r,0,\dots,0)$

其中$r = \mathrm{rank}\, f$

证:如果$r = 0$,则定理成立

设$r > 0$,对$\dim V$归纳

当$\dim V = 1$时,定理成立

设 $\dim V = n-1$ 时定理成立，再设 $\dim V = n$

$\because r > 0 \quad \therefore f \neq 0$ 由引理 11.1, $\exists \overrightarrow{e_1} \in V$, 使得 $f(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_1}) \neq 0$

令 $U = \{\vec{u} \in V | f(\vec{u}, \overrightarrow{e_\iota}) = 0\}$

考虑线性函数 $\varphi: V \to F, \vec{v} \mapsto f(\vec{v}, \overrightarrow{e_1})$, 则 $U = \ker\varphi$

$\because \varphi(\overrightarrow{e_1}) = f(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_1}) \neq 0 \quad \therefore \varphi \neq 0$

$\because \dim \mathrm{im}\,\varphi = 1 \quad \therefore \dim U = n-1$

设 $\vec{v} \in \langle\overrightarrow{e_1}\rangle \cap U$, 则 $\vec{v} = \alpha\overrightarrow{e_1}, \alpha \in F$

$0 = f(\alpha\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_1}) = \alpha f(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_1}) \Rightarrow \alpha = 0$

$\Rightarrow \langle\overrightarrow{e_1}\rangle \cap U = \{\vec{0}\} \Rightarrow \dim(\langle\overrightarrow{e_1}\rangle + U) = \dim U + \dim\langle\overrightarrow{e_1}\rangle = n = \dim V$

$\Rightarrow V = \langle\overrightarrow{e_1}\rangle \oplus U \qquad [*]$

设 $g = f\big|_{U\times U}$, 即 $g: U \times U \to F, (\vec{x}, \vec{y}) \mapsto f(\vec{x}, \vec{y})$

则 $g \in \mathcal{L}_2^+(U, F)$

由归纳假设，存在 U 中一组基 $\overrightarrow{e_2}, \dots, \overrightarrow{e_n}$

使得 g 在该基下的矩阵为 $\mathrm{diag}_{n-1}(\lambda_2, \dots, \lambda_s, 0, \dots, 0)$

其中 $s = \mathrm{rank}\, g + 1$, 特别地

$\forall i, j \in \{2, \dots, n\}, i \neq j, g(\overrightarrow{e_\iota}, \overrightarrow{e_J}) = 0 = f(\overrightarrow{e_\iota}, \overrightarrow{e_J})$

$\because \overrightarrow{e_2}, \dots, \overrightarrow{e_n} \in U \ \therefore f(\overrightarrow{e_\iota}, \overrightarrow{e_1}) = 0, i = 2, \dots, n$

又因为 f 对称, $f(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_\iota}) = 0, i = 2, \dots, n$

令 $\lambda_1 = f(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_1})$, 则 f 在 $\overrightarrow{e_1}, \dots, \overrightarrow{e_n}$ 下的矩阵为 $\mathrm{diag}_n(\lambda_1, \dots, \lambda_s, 0, \dots, 0)$

且 $\mathrm{rank}\, f = s$ ■

注: 由 $[*]$, $\overrightarrow{e_1}, \dots, \overrightarrow{e_n}$ 是 V 的基底

【推论 11.1】对称矩阵可对角化

设$A \in M_n(F)$对称, 则$\exists \lambda_1, \dots, \lambda_r \in F \setminus \{0\}$

使得$A \sim_c \operatorname{diag}_n(\lambda_1, \dots, \lambda_r, 0, \dots, 0)$

证: 设F^n的标准基为$\overrightarrow{e_1}, \dots, \overrightarrow{e_n}$

定义$f: F^n \times F^n \to F, \qquad \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \mapsto (x_1 \ \cdots \ x_n) A \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$

即A为f在$\overrightarrow{e_1}, \dots, \overrightarrow{e_n}$下的矩阵

$\because A$对称 $\quad \therefore f$对称 $\left[\text{命题 } 10.2\right]$

由定理 11.1, $\exists V$的一组基$\overrightarrow{\varepsilon_1}, \dots, \overrightarrow{\varepsilon_n}$

使得在该基下f的矩阵是$\operatorname{diag}_n(\lambda_1, \dots, \lambda_r, 0, \dots, 0)$

其中$r = \operatorname{rank} A$

由定理 10.1, $A \sim_c \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_r, 0, \dots, 0)$

【定义 11.1.1】对称双线性型的规范基

设$f \in \mathcal{L}_2(V, F)$, 若$f$在$V$的某组基下的矩阵是对角矩阵

则该基称为f的一组规范基

【例 11.1.1】降维法求规范基和规范型

设$\mathbb{R}^3$中, 对称双线性型f在标准基$\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}$下的矩阵是

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 5 & 0 \\ -2 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

求f在规范基和在该基下的矩阵

解: 1. 求$\vec{v}$使得$f(\vec{v}, \vec{v}) \neq 0 \qquad$ 由A的定义, 可取$\vec{v} = \overrightarrow{e_1}$

2. 令$\varphi: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \qquad \vec{x} \mapsto f(\vec{x}, \overrightarrow{e_1})$, 求$\ker \varphi$ 的一组基

设$\vec{x}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}, \varphi(\vec{x})=(x_1,x_2,x_3)A\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}=x_1+x_2-2x_3$

$$\ker\varphi=\left\langle\underbrace{\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}}_{\overrightarrow{\varepsilon_2}},\underbrace{\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}}_{\overrightarrow{\varepsilon_3}}\right\rangle$$

3. 求$f\big|_{U\times U}$在$\overrightarrow{\varepsilon_2},\overrightarrow{\varepsilon_3}$下的矩阵, 其中$U=\ker\varphi$

设$g=f\big|_{U\times U}$, 则g在$\overrightarrow{\varepsilon_2},\overrightarrow{\varepsilon_3}$下的矩阵是

$$B=\begin{pmatrix}g(\overrightarrow{\varepsilon_2},\overrightarrow{\varepsilon_2}) & g(\overrightarrow{\varepsilon_2},\overrightarrow{\varepsilon_3})\\ g(\overrightarrow{\varepsilon_3},\overrightarrow{\varepsilon_2}) & g(\overrightarrow{\varepsilon_3},\overrightarrow{\varepsilon_3})\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}f(\overrightarrow{\varepsilon_2},\overrightarrow{\varepsilon_2}) & f(\overrightarrow{\varepsilon_2},\overrightarrow{\varepsilon_3})\\ f(\overrightarrow{\varepsilon_3},\overrightarrow{\varepsilon_2}) & f(\overrightarrow{\varepsilon_3},\overrightarrow{\varepsilon_3})\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4 & -2\\ -2 & 8\end{pmatrix}$$

降维重复

1. 求$\vec{u}\in U$, 使得 $g(\vec{u},\vec{u})\neq 0$, 由B的定义可知取$\vec{u}=\overrightarrow{\varepsilon_2}$

2. 设$\psi: U\to\mathbb{R}, \vec{x}\mapsto g(\vec{x},\overrightarrow{\varepsilon_2})$, 确定$\ker\psi$

设$\vec{z}=z_1\overrightarrow{\varepsilon_1}+z_2\overrightarrow{\varepsilon_2}$, $\qquad \psi(\vec{z},\overrightarrow{\varepsilon_2})=(z_1,z_2)B\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=4z_1-2z_2$

$$\ker\psi=\langle\overrightarrow{\varepsilon_2}+2\overrightarrow{\varepsilon_3}\rangle$$

$$\overrightarrow{\varepsilon_2}+2\overrightarrow{\varepsilon_3}=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}+2\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\-1\\2\end{pmatrix}$$

设$\overrightarrow{w_1}=\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{w_2}=\overrightarrow{\varepsilon_2}, \overrightarrow{w_3}=\overrightarrow{\varepsilon_2}+2\overrightarrow{\varepsilon_3}$

则$\overrightarrow{w_1},\overrightarrow{w_2},\overrightarrow{w_3}$是$f$的规范基

$$(\overrightarrow{w_1},\overrightarrow{w_2},\overrightarrow{w_3})=(\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2},\overrightarrow{e_3})\underbrace{\begin{pmatrix}1 & 1 & 5\\ 0 & -1 & -1\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}}_{C}$$

f在$\overrightarrow{w_1},\overrightarrow{w_2},\overrightarrow{w_3}$下的矩阵

$$C^tAC=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 4 & 0\\ 0 & 0 & -36\end{pmatrix}$$

注: 设$\vec{x}=x_1\overrightarrow{e_1}+x_2\overrightarrow{e_2}+x_3\overrightarrow{e_3}, \vec{y}=y_1\overrightarrow{e_1}+y_2\overrightarrow{e_2}+y_3\overrightarrow{e_3}$

$$f(\vec{x},\vec{y})=(x_1,x_2,x_3)\begin{pmatrix}1 & 1 & -2\\ 1 & 5 & 0\\ -2 & 0 & -4\end{pmatrix}$$

$$= x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 - 2x_1y_3 - 2x_3y_1 + 5x_2y_2 - 4x_2y_2$$

设$\vec{x} = x_1'\overrightarrow{w_1} + x_2'\overrightarrow{w_2} + x_3'\overrightarrow{w_3}, \vec{y} = y_1'\overrightarrow{w_1} + y_2'\overrightarrow{w_2} + y_3'\overrightarrow{w_3}$

$$f(\vec{x},\vec{y}) = (x_1', x_2', x_3')\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 4 & 0\\ 0 & 0 & -36\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1'\\ y_2'\\ y_3'\end{pmatrix}$$

$$= x_1'y_1' + 4x_2'y_2' - 36x_3'y_3'$$

$$\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix}1 & 1 & 5\\ 0 & -1 & -1\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}}_{C}\begin{pmatrix}x_1'\\ x_2'\\ x_3'\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}y_1\\ y_2\\ y_3\end{pmatrix} = C\begin{pmatrix}y_1'\\ y_2'\\ y_3'\end{pmatrix}$$

令$\overrightarrow{t_1} = \overrightarrow{w_1}, \overrightarrow{t_2} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{w_2}, \overrightarrow{t_3} = \dfrac{1}{6}\overrightarrow{w_3}$

$$f\left(\overrightarrow{t_1},\overrightarrow{t_1}\right) = 1, f\left(\overrightarrow{t_2},\overrightarrow{t_2}\right) = f\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{w_2},\frac{1}{2}\overrightarrow{w_2}\right) = \frac{1}{4}f(\overrightarrow{w_2},\overrightarrow{w_2}) = 1$$

$$f\left(\overrightarrow{t_3},\overrightarrow{t_3}\right) = \frac{1}{6}f(\overrightarrow{w_3},\overrightarrow{w_3}) = -1$$

在$\overrightarrow{t_1},\overrightarrow{t_2},\overrightarrow{t_3}$下$f$的矩阵为$\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}$

§12 二次型

§12.1 二次型的定义和性质

【定义 12.1.1】二次型 配极双线性型

$q:V\to F$称为二次型

如果存在$f\in\mathcal{L}_2^+$使得$\forall\vec{x}\in V,q(\vec{x})=f(\vec{x},\vec{x})$

由柯$P31$定理 3 可知上述定义与柯$P31$的定义等价

注 1: 称f为q的一个配极双线性型

【命题 12.1】配极双线性型唯一性

设q是V上的二次型, 则q的配极双线性型唯一

证: 设$f,g\in\mathcal{L}_2^+(V,F)$使得$q(\vec{x})=f(\vec{x},\vec{x})=g(\vec{x},\vec{x})$

则$\forall\vec{x}\in V,f(\vec{x},\vec{x})=g(\vec{x},\vec{x})$

由极化公式[引理 11.1]可知 $\forall\vec{x},\vec{y}\in V,f(\vec{x},\vec{y})=g(\vec{x},\vec{y})$ ■

【例 12.1.1】二次型是齐二次函数

设$f\in\mathcal{L}_2^+(V,F),\overrightarrow{e_1},\dots,\overrightarrow{e_n}$是$V$的基,$A\in M_n(F)$是$f$在该基下的矩阵

则$A=\left(a_{ij}\right)_{n\times n}$对称

$$\text{令}f(\vec{x},\vec{x})=(x_1\quad\cdots\quad x_n)A\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j$$

$$=\sum_{i=1}^{n}a_{ii}x_i^2+\sum_{1\le 1<j\le n}\left(a_{ij}+a_{ji}\right)x_ix_j$$

$$=\sum_{i=1}^{n} a_{ii}x_i^2+2\sum_{1\le 1<j\le n} a_{ij}x_ix_j$$

令$q(\vec{x})=f(\vec{x},\vec{x}),q:V\to F,\vec{x}\mapsto\sum_{i=1}^{n}a_{ii}x_i^2+\sum_{1\le 1<j\le n}\left(a_{ij}+a_{ji}\right)x_ix_j$

每一个二次型都是一个二次齐次函数

【例 12.1.2】由解析式求二次型矩阵

$$q:F^n\to F,\vec{x}=\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}\mapsto\sum_{i=1}^{n}\alpha_ix_i^2+\sum_{1\le 1<j\le n}\alpha_{ij}x_ix_j$$

令$\beta_{ii}=\alpha_i,i=1,\dots,n,\qquad \beta_{ij}=\beta_{ji}=\dfrac{\alpha_{ij}}{2},1\le i<j<n$

$$q(\vec{x})=\sum_{i=1}^{n}\beta_{ii}x_i^2+\sum_{1\le 1<j\le n}\left(\beta_{ij}+\beta_{ji}\right)x_ix_j$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\beta_{ii}x_i^2+\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\beta_{ij}x_ix_j-\sum_{i=1}^{n}\beta_{ii}x_i^2$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\beta_{ij}x_ix_j=(x_1\quad\cdots\quad x_n)B\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}$$

其中$B=\left(\beta_{ij}\right)_{n\times n},\beta_{ij}=\beta_{ji}$

$\because B$对称 $\therefore f:F^n\times F^n\to F,\qquad \begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix},\begin{pmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix}\mapsto(x_1\ \cdots\ x_n)B\begin{pmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix}$

是对称双线性型,且$q(\vec{x})=f(\vec{x},\vec{x})$是二次型

【定义 12.1.2】二次型的矩阵

设$q: V \to F$是二次型,$f \in \mathcal{L}_2^+(V, F)$是$q$的配极

设$\overrightarrow{e_1}, \dots, \overrightarrow{e_n}$是$V$的基,$A$是$f$在$\overrightarrow{e_1}, \dots, \overrightarrow{e_n}$下的矩阵

称A是q在$\overrightarrow{e_1}, \dots, \overrightarrow{e_n}$下的矩阵,$\operatorname{rank} q \coloneqq \operatorname{rank} f$

注:q在$\overrightarrow{e_1}, \dots, \overrightarrow{e_n}$下的矩阵是对称的

【例 12.1.3】二次型的矩阵例

$$q: F^3 \to F, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto x_1^2 + x_1x_2 - 3x_2x_3$$

求q在$\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}$下的矩阵

$$x_1^2 + x_1x_2 - 3x_2x_3 = x_1^2 + \frac{1}{2}x_1x_2 + \frac{1}{2}x_2x_1 - \frac{3}{2}x_2x_3 - \frac{3}{2}x_3x_2$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{3}{2} \\ 0 & -\frac{3}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

【例 12.1.4】二次型的矩阵例 2

$$q(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_1x_2 + x_2x_3 + \dots + x_{n-1}x_n$$

求A在F^n的标准基下的矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & & & & \\ 1/2 & 0 & 1/2 & & & \\ & 1/2 & 0 & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & 0 & 1/2 \\ & & & & 1/2 & 0 \end{pmatrix}$$

【定义 12.1.3】二次型的规范基

设$q: V \to F$是二次型,$f \in \mathcal{L}_2^+(V, F)$是$q$的配极

f的规范基也称为q的规范基

【定理 12.1】二次型可对角化

设q是V上的二次型,$\operatorname{rank} q = r$

$\overrightarrow{\varepsilon_1}, \dots, \overrightarrow{\varepsilon_n}$是$q$的规范基,则$\exists \lambda_1, \dots, \lambda_r \in F \setminus \{0\}$

使得$\forall \vec{x} = x_1\overrightarrow{\varepsilon_1} + \cdots + x_n\overrightarrow{\varepsilon_n} \in V, q(\vec{x}) = \lambda_1 x_1^2 + \cdots + \lambda_r^2 x_r^2$

证:设$f \in \mathcal{L}_2^+(V, F)$是$q$的配极

则在$\overrightarrow{\varepsilon_1}, \dots, \overrightarrow{\varepsilon_n}$下,$f(\vec{x}, \vec{y}) = \lambda_1 x_1 y_1 + \cdots + \lambda_r x_r y_r$

其中$\lambda_1, \dots, \lambda_r \in F \setminus \{0],$

$\vec{x} = x_1\overrightarrow{\varepsilon_1} + \cdots + x_n\overrightarrow{\varepsilon_n}, \vec{y} = y_1\overrightarrow{\varepsilon_1} + \cdots + y_n\overrightarrow{\varepsilon_n}$

$q(\vec{x}, \vec{x}) = \lambda_1 x_1^2 + \cdots + \lambda_r x_r^2$ ■

【问题】求二次型的规范基和规范型

方法 1. A.写出二次型的矩阵

B.写出二次型的配极

C.利用 11 节的降维法

方法 2 配方法

方法 3 行列变换法

【例 12.1.5】配方法求二次型的规范基和规范型

设$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, q(\vec{x}) = 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 6x_2x_3$

求q的规范型的一组规范基

注:此时$q: F^3 \to F, \vec{x} \mapsto q(\vec{x})$

作线性变量替换

$$\begin{cases} x_1 = y_1 + y_2 \\ x_2 = y_1 - y_2 \\ x_3 = y_3 \end{cases} \quad 令\vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}, \vec{x} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{C_1} \vec{y} \quad C_1可逆$$

$q(\vec{x}) = q(C_1\vec{y}) = 2y_1^2 - 2y_2^2 - 4y_1y_3 + 8y_2y_3$

配方 $q(C_1\vec{y}) = 2(y_1^2 - 2y_1y_3) - 2(y_2 - 4y_2y_3)$

$= 2(y_1^2 - 2y_1y_3 + y_3^2) - 2(y_2^2 - 4y_2y_3 + 4y_3^2) - 2y_3^2 + 8y_3^2$

$= 2(y_1 - y_3)^2 - 2(y_2 - 2y_3)^2 + 6y_3^2$

线性变量替换

$$\begin{cases} z_1 = y_1 - y_3 \\ z_2 = y_2 - 2y_3 \\ z_3 = y_3 \end{cases} \quad 令\vec{z} = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix}, \vec{z} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{C_2} \vec{y}$$

$\vec{y} = C_2^{-1}\vec{z}, \qquad q(C_1C_2^{-1}\vec{z}) = 2z_1^2 - 2z_2^2 + 6z_3^2$

坐标变换为$\vec{x} = C_1C_2^{-1}\vec{z} \Rightarrow (\overrightarrow{\varepsilon_1}, \overrightarrow{\varepsilon_2}, \overrightarrow{\varepsilon_3}) = (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3})(C_1C_2^{-1})$

$$C_1C_2^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \left(\underbrace{\begin{matrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}}_{C}\right)$$

$(\overrightarrow{\varepsilon_1}, \overrightarrow{\varepsilon_2}, \overrightarrow{\varepsilon_3}) = (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3})C = C$ 规范型为$q(\vec{z}) = 2z_1^2 - 2z_2^2 + 6z_3^2$

注:$q(\vec{x})$在标准基下的矩阵是$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -3 \\ 1 & -3 & 0 \end{pmatrix}$

$$C^tAC = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

§13 应用：齐二次多项式因式分解

【问题】二次型能否因式分解

给定$p \in F[x_1, \dots, x_n]$齐二次,问p是否能写成两个齐一次多项式之积

注:如果齐二次的多项式可以写成两个一次多项式之积,

这两个多项式一定是齐次的

【命题 13.1】n 元多项式环之间同构

设$F[x_1, \dots, x_n]$和$F[y_1, \dots, y_n]$是两个多项式环

$C \in GL_n(F)$,令$C = \left(c_{ij}\right)_{n\times n}$

则环同态$\varphi_C: F[x_1, \dots, x_n] \to F[y_1, \dots, y_n]$

$\varphi_C\big|_F = Id \quad \varphi_C(x_i) = \sum_{j=1}^{n} c_{ij} y_j, i = 1, \dots, n$ 是同构

易验证φ_C是同态,要证φ_C是同构,只需证明φ_C逆存在

设$C^{-1} = D = \left(d_{ij}\right)_{n\times n}$

$\psi_D: F[y_1, \dots, y_n] \to F[x_1, \dots, x_n]$

满足$\psi_D\big|_F = Id \quad \psi\left(y_j\right) = \sum_{j=1}^{n} d_{ij} x_j$,易验证$\psi_D$是同态

$\forall a \in F, \varphi_C \circ \psi_D(a) = a$

$\forall i \in \{1, \dots, n\}, \varphi_C \circ \psi_D(y_i) = \varphi_C\left(\sum_{j=1}^{n} d_{ij} x_j\right)$

$= \sum_{j=1}^{n} d_{ij} \varphi_C\left(x_j\right) = \sum_{j=1}^{n} d_{ij} \sum_{i=1}^{n} c_{ji} y_i$

$$=\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} d_{ij}c_{ji}\right)y_i=\sum_{k=1}^{n}\delta_{ik}y_k=y_i$$

即$\varphi_C\circ\psi_D\big|_F=Id,\varphi_C\circ\psi_D(y_i)=y_i,i=1,\dots,n$

$\Rightarrow\varphi_C\circ\psi_D=Id$

同理$\psi_D\circ\varphi_C:F[x_1,\dots,x_n]\to F[x_1,\dots,x_n]$是恒同映射 ■

注:φ_C为由线性变量替换$\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}=C\begin{pmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix}$诱导的同构

注:$\because\varphi_C$是同构 $p\in F[x_1,\dots,x_n],g,h\in F[x_1,\dots,x_n]$

$p=gh\Rightarrow\varphi_C(p)=\varphi_C(gh)=\varphi_C(g)\varphi_C(h)$

$\varphi_C(p)=\varphi_C(g)\varphi_C(h)\Rightarrow\varphi_C^{-1}\big(\varphi_C(p)\big)=\varphi_C^{-1}\big(\varphi_C(g)\varphi_C(h)\big)$

$\Rightarrow p=\varphi_C^{-1}\circ\varphi_C(g)\varphi_C^{-1}\circ\varphi_C(h)=gh$

于是p在$F[x_1,\dots,x_n]$中可约$\Leftrightarrow\varphi_C(p)$在$F[y_1,\dots,y_n]$中可约

设p是齐二次的,则p可以看成$F^n\to F$的二次型

在标准基下$p=(x_1\quad\cdots\quad x_n)A\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}$

其中$A\in M_n(F)$对称,把A的秩也称为p的秩,记为$\operatorname{rank}p$

【命题 13.2】二次型可分解的必要条件

设$p\in F[x_1,\dots,x_n]$齐二次

如果$p(x_1,\dots,x_n)=l_1(x_1,\dots,x_n)l_2(x_1,\dots,x_n)$

其中l_1,l_2是齐一次的$F[x_1,\dots,x_n]$中的多项式

则$\operatorname{rank}p\le 2$

证:由$p=l_1l_2$可知$\forall\vec{x}\in F^n,p(\vec{x})=l_1(\vec{x})l_2(\vec{x})$

设$f(\vec{x},\vec{y})=\dfrac{1}{2}\big(l_1(\vec{x})l_2(\vec{y})+l_1(\vec{y})l_2(\vec{x})\big)$

则$f \in \mathcal{L}^+(F^n, F)$ 且f是二次型p的配极

设$K_1 = \ker l_1, K_2 = \ker l_2$

由维数公式, $\dim(K_1 \cap K_2) = \dim K_1 + \dim K_2 - \dim(K_1 + K_2)$

$\geq n - 1 + n - 1 - n = n - 2$

设$\overrightarrow{\varepsilon_3}, \dots, \overrightarrow{\varepsilon_n} \in K_1 \cap K_2$线性无关, 并将其扩充为$F^n$的基$\overrightarrow{\varepsilon_1}, \dots, \overrightarrow{\varepsilon_n}$

则$\forall i \geq 3, k \in \{1, \dots, n\}, f(\overrightarrow{\varepsilon_k}, \overrightarrow{\varepsilon_i}) = f(\overrightarrow{\varepsilon_i}, \overrightarrow{\varepsilon_k}) = 0$

于是p在$\overrightarrow{\varepsilon_1}, \dots, \overrightarrow{\varepsilon_n}$下的矩阵为$\begin{pmatrix} f(\overrightarrow{\varepsilon_1}, \overrightarrow{\varepsilon_1}) & f(\overrightarrow{\varepsilon_1}, \overrightarrow{\varepsilon_2}) & O \\ f(\overrightarrow{\varepsilon_2}, \overrightarrow{\varepsilon_1}) & f(\overrightarrow{\varepsilon_2}, \overrightarrow{\varepsilon_2}) & \\ & O & O \end{pmatrix}$

于是$\operatorname{rank} p \leq 2$ ■

【例 13.1.1】判断不可分解例

$p = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \in F[x_1, x_2, x_3]$不可约

【命题 13.3】二次型可分解的判定

设$p \in F[x_1, \dots, x_n]$齐二次非零

设p在F^n的某组基下的矩阵为$M = \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_r, 0, \dots, 0)$

$\lambda_1, \dots, \lambda_r \in F \setminus \{0\}$

$(i) r \geq 3$ 时, p不可约

$(ii) r \leq 2$ 时, p可约当且仅当$\lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2$在$F[y_1, y_2]$中可约

证: $(i) \because \operatorname{rank} p = r \quad \therefore (i)$成立$\left[\text{命题 } 13.2\right]$

(ii)设p在标准基下的矩阵是A

则存在可逆矩阵C使得$M = C^t A C$

考虑由线性变量替换$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$诱导的同构

$\varphi_C = F[x_1, \dots, x_n] \to F[y_1, \dots, y_n]$

$$\varphi_C(p) = \varphi_C\left((x_1 \quad \cdots \quad x_n) A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \right)$$

$$= (y_1 \quad \cdots \quad y_n) C^t A C \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2$$

由命题 13.1,　　p可约 $\Leftrightarrow \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2$可约　　■

§14 复二次型

【定理 14.1】复二次型可单位矩阵化

设 V 是 $\mathbb{C}$ 上有限维线性空间,

q 是 V 上的二次型，则存在 V 的一组基 $\overrightarrow{\varepsilon_1},\dots,\overrightarrow{\varepsilon_n}$

使得 q 在该基底下的矩阵是 $\begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

即 $\forall \vec{x} = x_1\overrightarrow{\varepsilon_1} + \cdots + x_n\overrightarrow{\varepsilon_n} \in V, q(\vec{x}) = x_1^2 + \cdots + x_r^2$

证：由定理 12.1, 存在V的一组基 $\overrightarrow{e_1},\dots,\overrightarrow{e_n}$ 和 $\lambda_1,\dots,\lambda_r \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$

使得 q 在 $\overrightarrow{e_1},\dots,\overrightarrow{e_n}$ 下的矩阵是$A = \operatorname{diag}(\lambda_1,\dots,\lambda_r,0,\dots,0)$

由代数学基本定理,$\sqrt{\lambda_i} \in \mathbb{C}, i = 1,\dots,r$

考虑基变换

$$(\overrightarrow{\varepsilon_1},\dots,\overrightarrow{\varepsilon_n}) = (\overrightarrow{e_1},\dots,\overrightarrow{e_n})\underbrace{\operatorname{diag}\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda_1}},\dots,\frac{1}{\sqrt{\lambda_r}},1,\dots,1\right)}_{C}$$

则 q 在 $\overrightarrow{\varepsilon_1},\dots,\overrightarrow{\varepsilon_n}$ 下的矩阵是

$C^tAC = \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ O & 0 \end{pmatrix}$ ■

【推论 14.1】复对称矩阵可单位矩阵化

设$A \in M_n(\mathbb{C})$对称且 $r = rank\, A$

则 $A \sim_c \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

证：设 $q: \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}, \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mapsto (x_1,\dots,x_n)A\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

因为 A 对称，所以 A 是 q 的矩阵

由定理 14.1，$A \sim_c \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ■

【推论 14.2】复矩阵合同秩相等

设$A,B\in M_n(\mathbb{C})$对称，则 $A\sim_c B \Leftrightarrow rank\,A=rank\,B$

证：$\Rightarrow$ 定理 10.1

$\Leftarrow$ 由推论 14.1

$A\sim_c\begin{pmatrix}E_r & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix},B\sim_c\begin{pmatrix}E_r & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$

其中 $r=rank\,A=rank\,B$

于是 $A\sim_c B$　　■

【推论 14.3】复二次型可约的充要条件

设 $p\in\mathbb{C}[x_1,\dots,x_n]\setminus\{0\}$齐二次

则 p 在 $\mathbb{C}[x_1,\dots,x_n]$中可约 $\Leftrightarrow rank\,p\le 2$

证：$\Rightarrow$ 命题 13.2

$\Leftarrow\because rank\,p\le 2$

$\therefore$ 由定理 14.1 可知 p 作为二次型在 F^n的某组基下的规范型为

$y_1^2=y_1\cdot y_1$或 $y_1^2+y_2^2=\left(y_1+\sqrt{-1}y_2\right)\left(y_1-\sqrt{-1}y_2\right)$

由命题 13.3,p可约　　■

§15 实二次型

【定理 15.1】惯性定理

设V是 $\mathbb{R}$ 上有限维线性空间，$q\colon V\to\mathbb{R}$ 是二次型，则

$(i)$$q$在某组基$\overrightarrow{\varepsilon_1},\dots,\overrightarrow{\varepsilon_n}$下的矩阵是

$$A=\begin{pmatrix}E_s&0&0\\0&-E_t&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

即$\forall\vec{x}=x_1\overrightarrow{\varepsilon_1}+\ldots+x_n\overrightarrow{\varepsilon_n},q(\vec{x})=x_1^2+\cdots+x_s^2-x_{s+1}^2-\cdots-x_{s+t}^2$

(ii)如果q在另一组基$\overrightarrow{\varepsilon_1'},\dots,\overrightarrow{\varepsilon_n'}$下的矩阵是

$$A'=\begin{pmatrix}E_{s'}&0&0\\0&-E_{t'}&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

则$s=s',t=t'$

证：(i)由定理 12.1，存在V的一组基$\overrightarrow{e_1},\dots,\overrightarrow{e_n}$和$\lambda_1,\dots,\lambda_r\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$

使得q在该基下的矩阵是

$A=\operatorname{diag}(\lambda_1,\dots,\lambda_s)$

适当调整基底下标顺序，不妨设$\lambda_1,\dots,\lambda_s\in\mathbb{R}^+,\lambda_{s+1},\dots,\lambda_{s+t}\in\mathbb{R}^-$，

其中$s+t=r$，考虑基变换

$(\overrightarrow{\varepsilon_1},\dots,\overrightarrow{\varepsilon_n})$

$$=(\overrightarrow{e_1},\dots,\overrightarrow{e_n})\underbrace{\operatorname{diag}\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda_1}},\dots,\frac{1}{\sqrt{\lambda_s}},\frac{1}{\sqrt{-\lambda_{s+1}}},\dots,\frac{1}{\sqrt{-\lambda_{s+t}}},0,\dots,0\right)}_{C}$$

则q在$(\overrightarrow{\varepsilon_1},\dots,\overrightarrow{\varepsilon_n})$下的矩阵是$C^tAC=\begin{pmatrix}E_s&0&0\\0&-E_t&0\\0&0&0\end{pmatrix}_{n\times n}$

$(ii)$$s+t=s'+t'=\operatorname{rank}(A)$，要证$s=s',t=t'$，只需证$s=s'$

假设$s>s'$，令$U=\langle\overrightarrow{\varepsilon_1},\dots,\overrightarrow{\varepsilon_s}\rangle,U'=\left\langle\overrightarrow{\varepsilon_{s'+1}}',\dots,\overrightarrow{\varepsilon_n}'\right\rangle$

则 $\dim(U\cap U')=\dim U+\dim U'-\dim(U+U')$

$\geq s+(n-s')-n=s-s'>0$

$\therefore \exists \vec{u} \in U \cap U'$且$\vec{u} \neq \vec{0}$.

令$\vec{u}=\alpha_1\overrightarrow{\varepsilon_1}+\cdots+\alpha_s\overrightarrow{\varepsilon_s}=\beta_{s+1}\overrightarrow{\varepsilon_{s+1}}'+\cdots+\beta_n\overrightarrow{\varepsilon_n}'$

其中$\alpha_1,\ldots,\alpha_s,\beta_{s+1},\ldots,\beta_n$不全为零

$q(\vec{u})=\alpha_1^2+\cdots+\alpha_s^2>0, \qquad q(\vec{u})=-\beta_{s+1}^2-\cdots-\beta_{s+t}^2 \leq 0$,矛盾

同理,$s<s'$不成立$\Rightarrow s=s'$ ■

【定义 15.1.1】二次型的正负惯性指数 签名

设q,s,t如定理 15.1,

称s是q的正惯性指数,t是q的负惯性指数;(s,t)称为q的签名

注：$s+t=\operatorname{rank} q$

【推论 15.1】实对称矩阵对角化

设$A \in M_n(\mathbb{R})$对称，则$\exists!\, s,t \in \mathbb{N}$ 使得

$$A\sim_c\begin{pmatrix}E_s & 0 & 0\\ 0 & -E_t & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

证：设$q:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix} \mapsto (x_1 \quad x_2 \quad \ldots \quad x_n)A\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}$

因为A对称，所以A是q在标准基下的矩阵。

由定理 15.1，$\exists\mathbb{R}^n$的一组基$\overrightarrow{\varepsilon_1},\ldots,\overrightarrow{\varepsilon_n}$,

使得q在该基下的矩阵为$\begin{pmatrix}E_s & 0 & 0\\ 0 & -E_t & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$，且$s,t$唯一

因此该矩阵与A合同。 ■

【定义 15.1.2】矩阵的正负惯性指数 签名

设A,s,t与推论 15.1 相同，称s为A的正惯性指数，t为A的负惯性指数

(s,t)为A的签名，$s+t=\operatorname{rank}A$

【推论 15.2】合同签名相同

设$A,B\in M_n(\mathbb{R})$对称，则$A\sim_c B\Leftrightarrow$它们有同样的签名

证：

$\Rightarrow$：$A\sim_c B$, 且A,B对称，则A,B是同一个二次型

在不同基底下的矩阵。设该二次型为q，它的签名是(s,t)，

则$A\sim_c\begin{pmatrix}E_s & 0 & 0\\ 0 & -E_t & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}, B\sim_c\begin{pmatrix}E_s & 0 & 0\\ 0 & -E_t & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\Rightarrow$ A, B 有相同签名

$\Leftarrow$:

$$A\sim_c\begin{pmatrix}E_s & 0 & 0\\ 0 & -E_t & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\sim_c B\Rightarrow A\sim_c B \quad \blacksquare$$

【推论 15.3】二次型可约的充要条件签名版

设$p\in\mathbb{R}[x_1,\ldots,x_n]\setminus\{0\}$齐二次，则

p在 $\mathbb{R}[x_1,\ldots,x_n]$中可约

$\Leftrightarrow p$作为二次型的秩为 1 或者p的签名为$(1,-1)$

证：

$\Leftarrow$: 若$\operatorname{rank}p=1$ 或签名为$(1,-1)$,

则p在$\mathbb{R}^n$某组基下的规范型是$\pm y_1^2=(\pm y_1)(y_1)$

或者$y_1^2-y_2^2=(y_1-y_2)(y_1+y_2)$

由命题 13.3 得p可约

$\Rightarrow$: 由命题 13.2, $\operatorname{rank} p \leq 2$

于是p 的签名为$\left(\underbrace{(1,0)(0,1)}_{\operatorname{rank}(p)=1}\right)$或$\left(\underbrace{(2,0)(1,1)(0,2)}_{\operatorname{rank}(p)=2}\right)$

只要证明 当p的签名为$(2,0)$和$(0,2)$时，p不可约即可。

此时p有规范型$y_1^2+y_2^2$和$-y_1^2-y_2^2$, 它们在 $\mathbb{R}[y_1,y_2]$中不可约。

■

【例 15.1.1】转置乘积的性质

设$A\in M_n(\mathbb{R})$, 证明

$(i)A^tA$对称（对任何域都成立）

$(ii)A^tA$的负惯性指数为零

$(iii)\operatorname{rank}(A^tA)=\operatorname{rank}(A)$

证：(i)设$B=A^tA, B^t=(A^tA)^t=A^t(A^t)^t=A^tA=B\Rightarrow B$对称

(ii)设$q:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}, \vec{x}=\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}\mapsto(x_1\quad\cdots\quad x_n)B\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}$

设B的签名是(s,t), 在$\mathbb{R}^n$的某组基 $\overrightarrow{\varepsilon_1},\dots,\overrightarrow{\varepsilon_n}$下

$\forall\vec{y}=y_1\overrightarrow{\varepsilon_1}+\cdots+y_n\overrightarrow{\varepsilon_n},$

$q(\vec{y})=y_1^2+\cdots+y_s^2-y_{s+1}^2-\cdots-y_{s+t}^2$[惯性定理]

假设$t>0$, 则有 $q(\overrightarrow{\varepsilon_{s+1}})=-1<0$, 而

$\forall\vec{x}=\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}, q(\vec{x})=(x_1\quad\cdots\quad x_n)B\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}=(x_1\quad\cdots\quad x_n)A^tA\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}$

令$\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_n\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}$, 则$(\alpha_1\quad\cdots\quad\alpha_n)=(x_1\quad\cdots\quad x_n)A^t,$

$q(\vec{x})=(\alpha_1,\dots,\alpha_n)\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_n\end{pmatrix}=\alpha_1^2+\cdots+\alpha_n^2\geq 0$，矛盾

(iii) 由 (ii), $\quad \forall \vec{y} = y_1\overrightarrow{\varepsilon_1} + \cdots + y_n\overrightarrow{\varepsilon_n}$

$q(\vec{y}) = y_1^2 + \cdots + y_s^2 \Rightarrow \operatorname{rank}(q) = s \Rightarrow \operatorname{rank} B = s$

要证: $\operatorname{rank} B = \operatorname{rank} A \quad [B = A^t A]$

注意到 $q(\overrightarrow{\varepsilon_{s+1}}) = \cdots = q(\overrightarrow{\varepsilon_n}) = 0$

令 $\overrightarrow{\varepsilon_j} = \begin{pmatrix} \alpha_{1j} \\ \vdots \\ \alpha_{nj} \end{pmatrix}, j = s+1, \ldots, n, \qquad \begin{pmatrix} \beta_{1j} \\ \vdots \\ \beta_{nj} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} \alpha_{1j} \\ \vdots \\ \alpha_{nj} \end{pmatrix}$

$$0 = q(\overrightarrow{\varepsilon_j}) = (\alpha_{1j}, \ldots, \alpha_{nj}) A^t A \begin{pmatrix} \alpha_{1j} \\ \vdots \\ \alpha_{nj} \end{pmatrix} = (\beta_{1j}, \ldots, \beta_{ij}) \begin{pmatrix} \beta_{1j} \\ \vdots \\ \beta_{nj} \end{pmatrix}$$

$$= \beta_{1j}^2 + \cdots + \beta_{nj}^2$$

$\Rightarrow \beta_{1j} = \cdots = \beta_{nj} = 0 \ [\because \beta_{ij} \in \mathbb{R}]$

$\begin{pmatrix} \beta_{1j} \\ \vdots \\ \beta_{nj} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} \alpha_{1j} \\ \vdots \\ \alpha_{nj} \end{pmatrix} \Rightarrow \overrightarrow{\varepsilon_{s+1}}, \ldots, \overrightarrow{\varepsilon_n} \in V_A \quad \left[A\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \text{的解空间} \right]$

换言之

$\overrightarrow{\varepsilon_{s+1}}, \ldots, \overrightarrow{\varepsilon_n} \in V_A \Rightarrow \dim V_A \geq n - s$

由 $\dim V_A + \operatorname{rank} A = n$ 可知 $\operatorname{rank}(A) \leq s$

$s = \operatorname{rank}(B) = \operatorname{rank}(A^t A) \leq \operatorname{rank}(A) \leq s$

$\Rightarrow \operatorname{rank}(A) = \operatorname{rank}(B) = s$

■

§16 Jacobi 公式

【引理 16.1】n-1 维子空间交维数下限

设 $\dim V = n$,

$U_1, \ldots, U_k$是V中的子空间，且$\dim U_i \geq n-1, i=1,\ldots,k$

则 $\dim\left(\bigcap_{i=1}^{k} U_i\right) \geq n-k$

证：对k归纳，$k=1$ 正确

设$k-1$ 时引理成立，则k时

$$\dim\left(\bigcap_{i=1}^{k} U_i\right) = \dim\left(\left(\bigcap_{i=1}^{k-1} U_i\right) \cap U_k\right)$$

$$= \dim\left(\bigcap_{i=1}^{k-1} u_i\right) + \dim U_k - \dim\left(\left(\bigcap_{i=1}^{k-1} U_i\right) + U_k\right)$$

$$\geq n-(k-1)+(n-1)-n = n-k \qquad \blacksquare$$

【推论 16.1】和少于 n 个向量双线性型为零的向量存在性

设$f \in \mathcal{L}_2(V,F), \dim V = n, \overrightarrow{v_1}, \ldots, \overrightarrow{v_k} \in V$

如果$k<n$, 则$\exists \vec{v} \in V \backslash \{\vec{0}\}$，使得$f(\vec{v}, \overrightarrow{v_i}) = 0, i=1,2,\ldots,k$

证：设 $g_i: V \to F, \vec{x} \mapsto f(\vec{x}, \overrightarrow{v_i}), i=1,\ldots,k$, 则$g_i \in V^*$

$\dim\ker g_i = \dim V - \dim\operatorname{im} g_i = n-1$

记$K = \bigcap_{i=1}^{k} \ker g_i$, 则 $\dim K \geq n-k$ $\quad$[引理 16.1]

$\because k<n \quad \therefore \dim K \geq 1$

$\exists \vec{v} \in K \backslash \{\vec{0}\}, f(\vec{v}, \overrightarrow{v_i}) = g_i(\vec{v}) = 0, i=1,\ldots,k \qquad \blacksquare$

【引理 16.2】正交向量组判定向量在生成空间中

设$f \in \mathcal{L}_2(V,F), \overrightarrow{v_1}, \dots, \overrightarrow{v_k} \in V$, 且$\forall i,j \in \{1,\dots,k\}$

$f(\overrightarrow{v_i},\overrightarrow{v_i}) \neq 0, f\left(\overrightarrow{v_i},\overrightarrow{v_j}\right) = 0 \ \ (i \neq j)$

如果$\exists \vec{v} \neq 0$ 使得$f(\vec{v},\overrightarrow{v_i}) = 0, i = 1,\dots,k$, 则$\vec{v} \notin \langle \overrightarrow{v_i},\dots,\overrightarrow{v_k} \rangle$

证：假设 $\vec{v} \in \langle \overrightarrow{v_i},\dots,\overrightarrow{v_k} \rangle$，则$\exists \alpha_1,\dots,\alpha_k \in V$使得

$\vec{v} = \alpha_1\overrightarrow{v_1} + \cdots + \alpha_k\overrightarrow{v_k}$

$$\begin{aligned} 0 = f(\vec{v},\overrightarrow{v_i}) &= f(\alpha_1\overrightarrow{v_1} + \cdots + \alpha_k\overrightarrow{v_k},\overrightarrow{v_i}) \\ &= \alpha_1 f(\overrightarrow{v_1},\overrightarrow{v_i}) + \cdots + \alpha_k f(\overrightarrow{v_k},\overrightarrow{v_i}) \\ &= \alpha_i f(\overrightarrow{v_i},\overrightarrow{v_i}) \end{aligned}$$

$f(\overrightarrow{v_i},\overrightarrow{v_i}) \neq 0 \Rightarrow \alpha_i = 0, i = 1,\dots,k$

$\Rightarrow \vec{v} = \vec{0}$ 矛盾 ■

【定义 16.1】矩阵的（顺序）主子式

设$A = \left(a_{ij}\right) \in M_n(F), 1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n$

则$\begin{vmatrix} a_{i_1i_1} & a_{i_1i_2} & \cdots & a_{i_1i_k} \\ a_{i_2i_1} & a_{i_2i_2} & \cdots & a_{i_2i_k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i_ki_1} & a_{i_ki_2} & \cdots & a_{i_ki_k} \end{vmatrix}$称为$A$的一个$k$阶主子式。

当$i_1 = 1, i_2 = 2, \dots, i_k = k$时，

该主子式称为A的第k个顺序主子式，记为 $\triangle_k(A)$

【定理 16.1】Jacobi 定理

设$A \in M_n(F)$对称，记$\triangle_0 = 1$，$\triangle_k = \triangle_k(A), k = 1,2,\dots,n$

如果$\triangle_k \neq 0, k = 1,2,\dots,n,$则

$$A \sim_c \begin{pmatrix} \frac{\triangle_1}{\triangle_0} & & & \\ & \frac{\triangle_2}{\triangle_1} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \frac{\triangle_n}{\triangle_{n-1}} \end{pmatrix}$$

证：对n归纳知

当$n = 1$时,$A = (a_{11}) = \left(\frac{\triangle_1}{\triangle_0}\right)$ 正确

设$n-1$时定理成立，令$B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1,n-1} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2,n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & \cdots & a_{n-1,n-1} \end{pmatrix}$

则$\triangle_i = \triangle_i(B), i = 1,2,\dots,n-1$，由归纳假设

$$B \sim_c \begin{pmatrix} \frac{\triangle_1}{\triangle_0} & & & \\ & \frac{\triangle_2}{\triangle_1} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \frac{\triangle_{n-1}}{\triangle_{n-2}} \end{pmatrix} =: L$$

则存在$C \in GL_{n-1}(F)$使得$L = C^tBC$

令$D = \begin{pmatrix} C & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$则$D \in GL_n(F)$

直接计算$D^tAD = \begin{pmatrix} C^t & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} B & \vec{a} \\ \vec{a}^t & a_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\left[\text{其中}\vec{a} = \begin{pmatrix} a_{1,n} \\ \vdots \\ a_{n-1,n} \end{pmatrix}\right]$

$= \underbrace{\begin{pmatrix} L & \vec{b} \\ \vec{b}^t & a_{nn} \end{pmatrix}}_{M}$ $\left[\text{其中}\vec{b} = C^t\vec{a} \in F^{n-1}\right]$

于是$A \sim_c M$.

设$f: F^n \times F^n \to F, \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \mapsto (x_1 \quad x_2 \quad \dots \quad x_n) M \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$

则$f \in L_2^+(V,F)$, M是f在标准基$\overrightarrow{e_1}, \dots, \overrightarrow{e_n}$下的矩阵。

且对$i = 1,2,\dots,n-1$,

$f(\overrightarrow{e_i}, \overrightarrow{e_i}) = \dfrac{\triangle_i}{\triangle_{i-1}} \neq 0, f(\overrightarrow{e_i}, \overrightarrow{e_j}) = 0, i,j \in \{1,2,\dots,n-1\}, i \neq j$

由推论 16.1, $\exists \vec{v} \in V \backslash \{\vec{0}\}, f(\vec{v}, \overrightarrow{e_i}) = 0, i = 1,\dots,n-1$

由引理 16.2, $\overrightarrow{e_1}, \dots, \overrightarrow{e_{n-1}}, \vec{v}$是$F^n$的一组基

f在该基下的矩阵$N = \begin{pmatrix} L & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$, 其中$\lambda = f(\vec{v}, \vec{v}) \neq 0$

$M \sim_c N \Rightarrow A \sim_c N \Rightarrow \exists G \in GL_n(F)$, 使得$G^t A G = N$

则$|G^t AG| = |G^t||A||G| = |G|^2|A| = \lambda \triangle_{n-1}$

$\Rightarrow \lambda = \dfrac{|G|^2 \triangle_n}{\triangle_{n-1}}$

于是有$\begin{pmatrix} E_{n-1} & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{|G|} \end{pmatrix}^t \begin{pmatrix} L & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_{n-1} & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{|G|} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L & 0 \\ 0 & \dfrac{\triangle_{n-1}}{\triangle_n} \end{pmatrix}$

即$N \sim_c \begin{pmatrix} L & 0 \\ 0 & \dfrac{\triangle_{n-1}}{\triangle_n} \end{pmatrix} \Rightarrow A \sim_c \begin{pmatrix} \dfrac{\triangle_1}{\triangle_0} & & & \\ & \dfrac{\triangle_2}{\triangle_1} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \dfrac{\triangle_n}{\triangle_{n-1}} \end{pmatrix}$

■

§17 正定二次型与正定矩阵

本节中V是 $\mathbb{R}$ 上的有限维向量空间

【定义 17.1.1】二次型的（半）正定 （半）负定

设$q: V \to \mathbb{R}$ 是二次型，如果$\forall \vec{x} \in V \setminus \{0\}$

(i) $q(\vec{x}) > 0$ 则称q是正定的

(ii) $q(\vec{x}) < 0$ 则称q是负定的

(iii) $q(\vec{x}) \geq 0$ 则称q是半正定的

(iv) $q(\vec{x}) \leq 0$ 则称q是半负定的

注：当q是二次型时，$q(\vec{0}) = \vec{0}$

【定理 17.1】签名与正负定性关系

设q是V上的二次型，(s,t)是其签名。

(i) q正定 $\Leftrightarrow$ $s = \dim V$

(ii) q负定 $\Leftrightarrow$ $t = \dim V$

(iii) q半正定 $\Leftrightarrow$ $t = 0$

(iv) q半负定 $\Leftrightarrow$ $s = 0$

证：设$n = \dim V$，在V的基$\overrightarrow{e_1}, \dots, \overrightarrow{e_n}$下，有$\forall \vec{x} = x_1\overrightarrow{e_1} + \cdots + x_n\overrightarrow{e_n} \in V$

$$q(\vec{x}) = x_1^2 + \cdots + x_s^2 - x_{s+1}^2 - \cdots - x_{s+t}^2 \qquad [*]$$

其中$s + t = \operatorname{rank}(q) \leq n$

则$\forall i \in \{1, \dots, n\}$，$$q(\overrightarrow{e_i}) = \begin{cases} 1 & i \in \{1, \dots, s\} \\ -1 & i \in \{s+1, \dots, s+t\} \\ 0 & i \in \{s+t+1, \dots, n\} \end{cases} \qquad [**]$$

(i) q正定 $\Rightarrow \forall i \in \{1, \dots, n\}, q(\overrightarrow{e_i}) > 0 \overset{[**]}{\Longrightarrow} s = n$

$s = n \overset{[*]}{\Rightarrow} q(\vec{x}) = x_1^2 + \cdots + x_n^2 \Rightarrow$ 当$\vec{x} \neq \vec{0}$时，$q(\vec{x}) > 0$

(ii)类似

$(iii) q$半正定 $\Rightarrow \forall i \in \{1, \dots, n\}, q(\overrightarrow{e_i}) \geq 0 \overset{[**]}{\Longrightarrow} t = 0$

$t = 0 \overset{[*]}{\Rightarrow} q(\vec{x}) = x_1^2 + \cdots + x_s^2 \Rightarrow q(\vec{x}) \geq 0 \qquad (iv)$类似 ∎

注：当q是正定或负定时，由$s + t = \operatorname{rank}(q)$ 可知

$\operatorname{rank} q = \dim V \Rightarrow q$非退化

【定义 17.1.2】矩阵的（半）正定 （半）负定

设$A \in M_n(\mathbb{R})$, 令$q_A: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mapsto (x_1 \quad x_2 \quad \cdots \quad x_n) A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

如果q_A是正定$\big($负定，半正定，半负定$\big)$,

则称A是正定$\big($负定，半正定，半负定$\big)$

【定理 17.2】矩阵正负定性性质

设$A \in M_n(\mathbb{R})$对称， 签名为(s, t)，则

$(i) A$正定 $\Leftrightarrow \quad s = n \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{A} \sim_c E_n$

$(ii) A$负定 $\Leftrightarrow \quad t = n \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{A} \sim_{\mathrm{c}} - E_n$

$(iii) A$半正定 $\Leftrightarrow \quad t = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{A} \sim_{\mathrm{c}} \begin{pmatrix} E_s & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$(iv) A$半负定 $\Leftrightarrow \quad s = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{A} \sim_{\mathrm{c}} \begin{pmatrix} -E_t & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

证明：直接应用定理 17.1 和$A \sim_c \begin{pmatrix} E_s & 0 & 0 \\ 0 & -E_t & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ∎

注：当A是正定或负定时$\operatorname{rank} A = n$，即$A$满秩

注：二次型$q\left(\text{或对称矩阵}A \in M_n(\mathbb{R})\right)$是$\big($半$\big)$负定

$\Leftrightarrow -q\big($或$-A\big)$是$\big($半$\big)$正定的

【定理 17.3】转置乘积正定性

设$A\in M_n(\mathbb{R})$对称，

$(i)A$半正定 $\Leftrightarrow \exists B\in M_n(\mathbb{R})$ 使得$A=B^tB$

$(ii)A$正定 $\Leftrightarrow \exists B\in GL_n(\mathbb{R})$ 使得 $A=B^tB$

证：(i)设$r=\operatorname{rank}A$, $D_r=\begin{pmatrix}E_r & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}_{n\times n}$, r为 A 的正惯性指数

则$D_r^t=D_r$(对称性)，　　$D_r^2=D_r$(幂等性)

$\Rightarrow$: A半正定 $\Rightarrow A\sim_c D_r$(定理 17.2(iii), 其中$s=r$)

$\Rightarrow \exists C\in GL_n(\mathbb{R})$，$A=C^tD_rC=C^tD_rD_rC$ [幂等] $=C^tD_r^tD_rC$[对称]

$=(D_rC)^t(D_rC)$

令$B=D_rC$即可

$\Leftarrow$: 由例 15.1.1(ii) , A的负惯性指数是零 $\Rightarrow A$半正定

(ii) $\Rightarrow$: A正定 $\Rightarrow A$半正定 $\overset{(i)}{\Rightarrow} \exists B\in M_n(\mathbb{R}), A=B^tB$

$\Rightarrow B\in GL_n(\mathbb{R})$ [A满秩]

$\Leftarrow$: $\operatorname{rank}B=n\Rightarrow \operatorname{rank}A=n$, 设$(s,t)$为$A$的签名

由于A是半正定的，于是s等于A的秩$=n$ [定理 17.2(i)]

$\Rightarrow A$正定　　■

【例 17.1.1】正定相加正定

设$A,B\in M_n(\mathbb{R})$正定，证明$A+B$也正定

证：设$M\in M_n(\mathbb{R})$对称，

$$q_M:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R},\qquad \begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}\mapsto (x_1\quad x_2\quad \cdots\quad x_n)M\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}$$

是二次型，且在标准基下的矩阵是M

于是q_A,q_B正定，且$q_A+q_B=q_{A+B}$

$\forall \vec{x} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\vec{0}\}, q_{A+B}(\vec{x}) = q_A(\vec{x}) + q_B(\vec{x}) > 0 \Rightarrow q_{A+B}$正定

$\Rightarrow A + B$正定 ■

【例 17.1.2】正定的行列式和逆正定

设$A \in M_n(\mathbb{R})$正定，证明$(i)|A| > 0,$ $(ii)A^{-1}$正定

证：(i)由定理 17.3， $A = B^tB,$ 其中$B \in GL_n(\mathbb{R})$

$|A| = |B^t||B| = |B|^2 > 0$

$(ii)\mathrm{A}^{-1} = (\mathrm{B}^t\mathrm{B})^{-1} = B^{-1}(B^t)^{-1} = B^{-1}(B^{-1})^t$

令$C = (B^{-1})^t, A^{-1} = C^tC$. 由定理 17.3, A^{-1}正定 ■

【引理 17.1】正定矩阵主子式的性质

设A正定，则A的任何主子式为正，

且任何主子式对应的子矩阵正定。

证：设 $A = \left(a_{ij}\right)_{n\times n}, 1 \le i_1 < \cdots < i_k \le n$

$$M = \begin{pmatrix} a_{i_1i_1} & a_{i_1i_2} & \cdots & a_{i_1i_k} \\ a_{i_2i_1} & a_{i_2i_2} & \cdots & a_{i_2i_k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i_ki_1} & a_{i_ki_2} & \cdots & a_{i_ki_k} \end{pmatrix}$$

由上例(i)可知，要证$|M| > 0,$只要证M正定

$q_A: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ 正定，$q_M: \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ 分别是A和M对应的二次型。

$$\forall \vec{z} = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^k \text{且} \vec{\mathrm{z}} \ne \vec{0}_k, \qquad \text{令} \vec{x} = \begin{pmatrix} \vdots & \\ z_1 & [\text{行} i_1] \\ \vdots & \\ z_2 & [\text{行} i_2] \\ \vdots & \\ z_k & [\text{行} i_k] \\ \vdots & \end{pmatrix} \ne \vec{0}$$

即$\vec{x}$的第i_l个坐标为$z_l, l = 1,2,\ldots,k,$其他坐标为零，则

$\vec{x} \neq \vec{0}, \quad 0 < q_A(\vec{x}) = \vec{x}^t A\vec{x} = \vec{z}^t M\vec{z}$ [直接验证] $= q_M(\vec{z})$

$\Rightarrow q_M(\vec{z}) > 0 \Rightarrow M$正定 ■

注：M是正定矩阵

【定理 17.4】sylvester 判别法

设$A \in M_n(\mathbb{R})$对称, 则A正定 $\Leftrightarrow \forall i \in \{1, \dots, n\}, \triangle_i(A) > 0$

证:⇒： 引理 17.1

⇐： 由 Jacobi 定理

$$A = U\underbrace{\begin{pmatrix} \frac{\triangle_1}{\triangle_0} & & \\ & \ddots & \\ & & \frac{\triangle_n}{\triangle_{n-1}} \end{pmatrix}}_{B}U, \text{其中} U = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{\frac{\triangle_1}{\triangle_0}}} & & \\ & \ddots & \\ & & \frac{1}{\sqrt{\frac{\triangle_n}{\triangle_{n-1}}}} \end{pmatrix}$$

其中 $\triangle_0 = 1, \triangle_k = \triangle_k(A), k = 1,2, \dots, n$

$\because \frac{\triangle_1}{\triangle_0} > 0, \dots, \frac{\triangle_n}{\triangle_{n-1}} > 0, \quad \therefore B$正定 $\Rightarrow A$正定 ■

注：A半正定 $\Leftrightarrow A$的所有**主子式**不小于 0

【例 17.1.3】正定求参数范围

设$M = \begin{pmatrix} \alpha & -1 & -1 \\ -1 & \alpha & 1 \\ -1 & 1 & \alpha \end{pmatrix}$, 当 α 取何值时$M$是正定的？

解：$\triangle_1(M) = \alpha \quad \triangle_2(M) = \begin{vmatrix} \alpha & -1 \\ -1 & \alpha \end{vmatrix} = \alpha^2 - 1$

$\triangle_3(M) = (\alpha - 1)^2(\alpha + 2)$

M正定 $\Leftrightarrow \alpha > 0, \alpha^2 - 1 > 0, (\alpha - 1)^2(\alpha + 2) > 0 \Leftrightarrow \alpha > 1$

【例 17.4】正定性的应用 1

设A是n阶正定矩阵，$\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n\in\mathbb{R}$ 不全为零

证明 $D=\begin{vmatrix} & & & \alpha_1\\ & A & & \vdots\\ & & & \alpha_n\\ \alpha_1 & \cdots & \alpha_n & 0\end{vmatrix}<0$

证：设$\tilde{A}=\begin{pmatrix} & & & \alpha_1\\ & A & & \vdots\\ & & & \alpha_n\\ \alpha_1 & \cdots & \alpha_n & 0\end{pmatrix}$

$\because A$正定，$\exists B\in GL_n(\mathbb{R}),E_n=B^tAB$

令$C=\begin{pmatrix}B & 0\\0 & 1\end{pmatrix}$ 则C可逆

$$C^t\tilde{A}C=\begin{pmatrix}B^t & 0\\0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A & \vec{\alpha}\\ \vec{\alpha}^t & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}B & 0\\0 & 1\end{pmatrix}\left[\text{其中}\vec{\alpha}=\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_n\end{pmatrix}\right]=\begin{pmatrix}E_n & B^t\vec{\alpha}\\ \vec{\alpha}^tB & 0\end{pmatrix}$$

令$\vec{\beta}=B^t\vec{\alpha}=\begin{pmatrix}\beta_1\\ \vdots\\ \beta_n\end{pmatrix}$，则$\beta_1,\beta_2,\dots,\beta_n$不全为零$\left[\because B^t\text{可逆且}\vec{\alpha}\neq\vec{0}\right]$

则$C^t\tilde{A}C=\begin{pmatrix}E_n & \vec{\beta}\\ \vec{\beta}^t & 0\end{pmatrix}$

$$\left|C^t\tilde{A}C\right|=\begin{vmatrix}1 & & & & \beta_1\\ & 1 & & & \beta_2\\ & & \ddots & & \vdots\\ & & & 1 & \beta_n\\ \beta_1 & \beta_2 & \cdots & \beta_n & 0\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}1 & 0 & \cdots & 0 & \beta_1\\ 0 & 1 & \cdots & 0 & \beta_2\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & 1 & \beta_n\\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\beta_1^2-\beta_2^2-\cdots.-\beta_n^2\end{vmatrix}$$

$$=\sum_{i=1}^{k}\left(-\beta_i^2\right)<0 \qquad \blacksquare$$

【例 17.5】正定性的应用 2 估计行列式

设$A=\left(a_{ij}\right)_{n\times n}\in M_n(\mathbb{R})$正定，证明

(i)$|A|\leq a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$

$(ii)|A|^2\leq\prod_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n}a_{ji}^2\right)$　($Hadmard$不等式)

证：(i)对n归纳，$n=1$ 时$A=(a_{11}),|A|=a_{11}\leq a_{11},$成立

设$n-1$ 时结论成立

$$令A_{n-1}=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1\,n-1}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2\,n-1}\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\a_{n-1\,1}&a_{n-1\,2}&\cdots&a_{n-1\,n-1}\end{pmatrix}$$

由 sylvester 判别法,A_{n-1}正定

$\left[A_{n-1}\text{对称且}\triangle_i\,(A_{n-1})=\triangle_i\,(A)>0,i=1,\dots,n-1\right]$

由归纳假设,　$|A_{n-1}|\leq a_{11}a_{22}\cdots a_{n-1\,n-1}$

$$|A|=\begin{vmatrix}&&&\alpha_1\\&A_{n-1}&&\vdots\\&&&\alpha_{n-1}\\\alpha_1&\cdots&\alpha_{n-1}&a_{nn}\end{vmatrix},\text{其中}\alpha_i=a_{in},\qquad i=1,2,\dots,n-1$$

$$=\begin{vmatrix}&&&0+\alpha_1\\&A_{n-1}&&\vdots\\&&&0+\alpha_{n-1}\\\alpha_1&\cdots&\alpha_{n-1}&a_{nn}+0\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}&&&0\\&A_{n-1}&&\vdots\\&&&0\\\alpha_1&\cdots&\alpha_{n-1}&a_{nn}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}&&&\alpha_1\\&A_{n-1}&&\vdots\\&&&\alpha_{n-1}\\\alpha_1&\cdots&\alpha_{n-1}&0\end{vmatrix}$$

$=|A_{n-1}|a_{nn}+\beta,$其中 $\beta=-\alpha_1^2-\cdots-\alpha_{n-1}^2\leq 0,$ 见上例

$\leq|A_{n-1}|a_{nn}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$

(ii)当$|A| = 0$ 时，不等式显然成立。

设$A \neq 0$,令$B = A^t A$，则B正定

设$B = (b_{ij})_{n\times n}$,$A = (a_{ij})_{n\times n}$,$A^t = (a_{ij}{}')_{n\times n}$,则$a'_{ij} = a_{ji}$

由(i),$|A|^2 = |B| \leq b_{11} \cdots b_{nn}$

$$= \prod_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{n}} b_{ii} = \prod_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}{}' a_{ji} \right) = \prod_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ji}^2 \right) \qquad \blacksquare$$

注：$|A^t| = |A| \Rightarrow |A|^2 \leq \prod_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2 \right)$

§18 仿射同构下的二次曲面

【回忆】

§13 应用：齐二次多项式因式分解——线性变量替换

【定义 18.1】平移变量替换

设$\vec{\alpha}=\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_n\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^n, \vec{x}=\vec{y}+\vec{\alpha};\ \vec{y}=\vec{x}-\vec{\alpha}$

诱导出同构 $\varphi_{\vec{\alpha}}:\mathbb{R}[x_1,\dots,x_n]\to\mathbb{R}[y_1,\dots,y_n]$满足

$\varphi_{\vec{\alpha}}|_{\mathbb{R}}=\mathrm{id}_{\mathbb{R}},\qquad \varphi_{\vec{\alpha}}(x_i)=y_i+\alpha_i,\qquad i=1,2,\dots,n$

同样 $\varphi_{-\vec{\alpha}}:\mathbb{R}[y_1,\dots,y_n]\to\mathbb{R}[x_1,\dots,x_n]$满足$\varphi_{-\vec{\alpha}}\big|_{\mathbb{R}}=\mathrm{id}_{\mathbb{R}}$

$\varphi_{-\vec{\alpha}}(y_i)=x_i-\alpha_i,\qquad i=1,\dots,n$

可直接验证$\varphi_{-\vec{\alpha}}\circ\varphi_{\vec{\alpha}}=\mathrm{id}_{\mathbb{R}[x_1,\dots,x_n]}, \varphi_{\vec{\alpha}}\circ\varphi_{-\vec{\alpha}}=\mathrm{id}_{\mathbb{R}[x_1,\dots,x_n]}$

$\Rightarrow \varphi_{\vec{\alpha}}$是同构，称为由平移变量替换诱导出的同构。

由有限个线性变量替换和平移变量替换诱导出的同构的复合

(当复合有意义时)称为仿射同构。

容易验证，仿射同构是下列变量替换

$\vec{x}=A\vec{y}+\vec{\alpha};\vec{y}=A^{-1}\vec{x}-A^{-1}\vec{\alpha}$

依照同样方式诱导出的从$\mathbb{R}[x_1,\dots,x_n]$到$\mathbb{R}[y_1,\dots,y_n]$的同构。

【定理 18.1】二次型化规范型的仿射同构存在性

设$p\in\mathbb{R}[x_1,\dots,x_n],\deg p=2,$设 h 是p的齐二次部分，

把 h 作为从$\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ 的二次型，设其签名为(s,t)

则存在仿射同构 $\varphi:\mathbb{R}[x_1,\dots,x_n]\to\mathbb{R}[y_1,\dots,y_n]$

使得$\varphi(p)=y_1^2+\cdots+y_s^2-y_{s+1}^2-\cdots-y_{s+t}^2+\lambda y_{s+1}+\mu$, 其中$\lambda,\mu\in\mathbb{R}$

证：由惯性定理，$\exists C\in GL_n(\mathbb{R})$, 使得

对于$\vec{x}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix},\vec{y}=\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\\vdots\\y_n\end{pmatrix}$,

$$p(\vec{x})=p(C\vec{y})=y_1^2+\cdots+y_s^2-y_{s+1}^2-\cdots-y_{s+t}^2$$

$$+2\alpha_1y_1+\cdots+2\alpha_sy_s-2\alpha_{s+1}y_{s+1}-\cdots-2\alpha_{s+t}y_{s+t}+\beta_{s+t+1}y_{s+t+1}$$

$$+\cdots+\beta_ny_n+\mu,\qquad \text{其中}\alpha_i,\beta_j,\mu\in\mathbb{R}, \text{那么}$$

$$\begin{aligned}p(\vec{x})=p(C\vec{y})&=(y_1+\alpha_1)^2+\cdots+(y_s+\alpha_s)^2\\&-(y_{s+1}+\alpha_{s+1})^2-\cdots-(y_{s+t}+\alpha_{s+t}^2)\\&+\beta_{s+y+1}y_{s+t+1}+\cdots+\beta_ny_n+\delta,\qquad \delta\in\mathbb{R}\end{aligned}$$

令$\vec{y}=\vec{z}-\begin{pmatrix}\alpha_1\\\vdots\\\alpha_{s+t}\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}=\vec{z}-\vec{\alpha}$

$$p(\vec{x})=p(C\vec{y})=p\big(C(\vec{z}-\vec{\alpha})\big)$$

$$=z_1^2+\cdots+z_s^2-z_{s+1}^2-\cdots-z_{s+t}^2+\beta_{s+t+1}z_{s+t+1}+\cdots+\beta_nz_n+\delta'$$

如果 $\beta_{s+t+1}=\cdots=\beta_n=0$, 取 $\lambda=0,\mu=\delta'$即可

否则，不妨设$\beta_{s+t+1}\neq 0$

$$\begin{cases}w_1&=z_1\\\ \vdots\\w_{s+t}&=z_{s+t}\\w_{s+t+1}&=\beta_{s+t+1}z_{s+t+1}+\cdots+\beta_nz_n\\w_{s+t+2}&=z_{s+t+2}\\\ \vdots\\w_n&=z_n\end{cases}$$

$$\vec{w}=\underbrace{\begin{pmatrix} E_{s+t} & & & & \\ & \beta_{s+t+1} & \beta_{s+t+2} & \cdots & \beta_n \\ & & 1 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{pmatrix}}_{A}\begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}$$

则$|A|\neq 0 \Rightarrow A$可逆

$p(\vec{x})=p(C\vec{y})=p\big(C(\vec{z}-\vec{\alpha})\big)=p\big(C(A^{-1}\vec{w}-\vec{\alpha})\big)=p(CA^{-1}\vec{w}-C\vec{\alpha})$

$=w_1^2+\cdots+w_s^2-w_{s+1}^2-\cdots-w_{s+t}^2+\lambda w_{s+t+1}+\mu$ ■

【推论 18.1】进一步化简规范型

设$p\in\mathbb{R}[x_1,\dots,x_n]$, $\deg p=2$, h 为p的齐二次部分

h 的签名是(s,t) 令$r=s+t$，则存在仿射同构

$\psi:\mathbb{R}[x_1,\dots,x_n]\to\mathbb{R}[y_1,\dots,y_n]$

使得$\psi(p)=y_1^2+\cdots+y_s^2-y_{s+1}^2-\cdots-y_r^2+y_{r+1}$

或$\psi(p)=y_1^2+\cdots+y_s^2-y_{s+1}^2-\cdots-y_r^2+\xi$, $\xi\in\mathbb{R}$

证：由定理 18.1 ,∃仿射同构$\varphi:\mathbb{R}[x_1,\dots,x_n]\to\mathbb{R}[y_1,\dots,y_n]$

使得 $\varphi(p)=y_1^2+\cdots+y_s^2-y_{s+1}^2-\cdots-y_r^2+\lambda y_{r+1}+\mu$, 其中 $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$

若 $\lambda=0$，令$\xi=\mu$即可，否则考虑仿射变量替换

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_r \\ z_{r+1} \\ z_{r+2} \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_r \\ \lambda y_{r+1}+\mu \\ y_{r+2} \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

由此变换诱导的仿射同构把

$y_1^2+\cdots+y_s^2-y_{s+1}^2-\cdots-y_r^2+\lambda y_{r+1}+\mu$

映为

$z_1^2+\cdots+z_s^2-z_{s+1}^2-\cdots-z_r^2+z_{r+1}$ ■

设$p\in\mathbb{R}[x_1,\dots,x_n]$，$\deg p=2$

$p(x_1,\dots,x_n)=0$ 在$\mathbb{R}^n$中轨迹称为$\mathbb{R}^n$中的二次曲面。

我们来考虑p在仿射同构意义下的轨迹。

设r是p的齐二次部分的秩，(s,t)为p的齐二次部分的签名

情形 1：$n=2$

①$r=2,(s,t)=(2,0)$

$$y_1^2+y_2^2+\xi=0\quad\begin{cases}\text{圆} & \xi<0\\ \{(0,0)\} & \xi=0\\ \emptyset & \xi>0\end{cases}\ \left.\begin{matrix}\\ \\ \end{matrix}\right\}\text{退化}$$

②$r=2,(s,t)=(1,1)$

$$y_1^2-y_2^2+\xi=0\quad\begin{cases}\text{双曲线} & \xi\neq0\\ \text{两条直线} & \xi=0\ \text{退化}\end{cases}$$

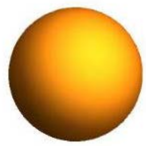
③$r=2,(s,t)=(0,2)$已考虑

④$r=1,(s,t)=(1,0)$

$y_1^2+y_2=0$(抛物线)或 $y_1^2+\xi=0$(退化)

情形 2：$n=3$

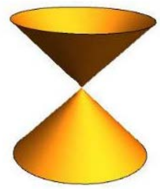
$p\in\mathbb{R}[x_1,x_2,x_3]$，齐二次部分的秩是$r$，签名是$(s,t)$

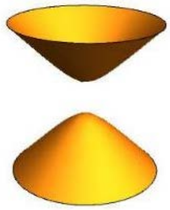


①$r=3,(s,t)=(3,0)$

$y_1^2+y_2^2+y_3^2+\xi=0$

$$\begin{cases}\text{球} & \xi<0\\ \{(0,0,0)\} & \xi=0\\ \emptyset & \xi>0\end{cases}\ \left.\begin{matrix}\\ \\ \end{matrix}\right\}\text{退化}$$



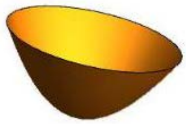


②$r=3,(s,t)=(2,1)$

$y_1^2+y_2^2-y_3^2+\xi=0$

$$\begin{cases}\text{双叶双曲面} & \xi>0\\ \text{圆锥面} & \xi=0\\ \text{单叶双曲面} & \xi<0\end{cases}$$

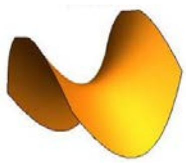
③$r=3,(s,t)=(1,2),(0,3)$已考虑



④$r=2,(s,t)=(2,0)$

$$\begin{cases}y_1^2+y_2^2+y_3=0 & \text{椭圆抛物面}\\ y_1^2+y_2^2+\xi=0 & \text{椭圆柱面}(\xi\geq 0\text{ 退化})\end{cases}$$

⑤$r=2,(s,t)=(1,1)$



$$\begin{cases}y_1^2-y_2^2+y_3+\xi=0 & \text{双曲抛物面}\\ y_1^2-y_2^2+\xi=0 & \text{双曲柱面}(\xi=0\text{ 退化})\end{cases}$$

⑥$r=2,(s,t)=(0,2)$已考虑

⑦$r=1,(s,t)=(1,0)$

$$\begin{cases}y_1^2+y_2+\xi=0 & \text{抛物柱面}\\ y_1^2+\xi=0 & \text{退化}\end{cases}$$

⑧$r=1,(s,t)=(0,1)$ 已考虑

§19 斜对称双线性型的规范型

【回忆】斜对称

$f \in \mathcal{L}_2(V,F)$ 称为斜对称的，如果 $\forall \vec{x},\vec{y} \in V, f(\vec{x},\vec{y}) = -f(\vec{y},\vec{x})$

斜对称双线性型的集合记为 $\mathcal{L}_2^-(V,F)$, 它是$\mathcal{L}_2(V,F)$的子空间。

$A \in M_n(F)$是斜对称的，如果$A^t = -A$

$f \in \mathcal{L}_2^-(V,F) \Leftrightarrow f$ 在 V 的基底下的矩阵是斜对称的。

【引理 19.1】奇数阶斜对称矩阵行列式为零

设$A \in M_n(F)$斜对称，则 $\det A = (-1)^n \det A$

特别地，当n为奇数时 $\det A = 0$

证：$A^t = -A, \qquad |A| = |A^t| = |-A| = (-1)^n A$

当 n 为奇数时，$|A| = -|A| \Rightarrow 2|A| = 0 \Rightarrow |A| = 0 \ \ [\mathrm{char}\, F \neq 2]$ ■

【引理 19.2】斜对称等价二次型为零

设$f \in \mathcal{L}_2(V,F)$,

$f \in \mathcal{L}_2^-(V,F) \Leftrightarrow \forall \vec{x} \in V, f(\vec{x},\vec{x}) = 0$

证:$\Rightarrow$： $f(\vec{x},\vec{x}) = -f(\vec{x},\vec{x}) \Rightarrow 2f(\vec{x},\vec{x}) = 0 \Rightarrow f(\vec{x},\vec{x}) = 0$

$\Leftarrow$: $0 = f(\vec{x}+\vec{y},\vec{x}+\vec{y})$

$= f(\vec{x},\vec{x}) + f(\vec{x},\vec{y}) + f(\vec{y},\vec{x}) + f(\vec{y},\vec{y})$

$= f(\vec{x},\vec{y}) + f(\vec{y},\vec{x})$

由此可知 $f(\vec{x},\vec{y}) = -f(\vec{y},\vec{x})$ ■

【引理 19.3】斜对称不为零判定线性无关

设 $f \in \mathcal{L}_2^-(V,F), \qquad \vec{u},\vec{v} \in V \setminus \{\vec{0}\}$

如果 $f(\vec{u},\vec{v}) \neq 0$, 则 $\vec{u},\vec{v}$ 线性无关

证：假设 $\vec{u} = \alpha\vec{v}, \alpha \in F$,

$0 \neq f(\vec{u},\vec{v}) = f(\alpha\vec{v},\vec{v}) = \alpha f(\vec{v},\vec{v}) = 0 \left[\text{引理 } 19.2\right]$

矛盾，故假设不成立。 ■

【例 19.1.1】一维空间上的斜对称为零

设 $\dim V = 1, f \in \mathcal{L}_2^-(V,F), \vec{v} \in V \setminus \{\vec{0}\}$

$\forall \vec{x},\vec{y} \in V, \qquad \vec{x} = \lambda\vec{v}, \vec{y} = \mu\vec{v}$

$f(\vec{x},\vec{y}) = f(\lambda\vec{v},\mu\vec{v}) = \lambda\mu f(\vec{v},\vec{v}) = 0$

【例 19.1.2】二维空间斜对称例

设 $\dim V = 2, f \in \mathcal{L}_2^-(V,F) \setminus \{0\}$,

则 $\exists \overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2} \in V, f(\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2}) \neq 0 \xRightarrow{[\text{引理 } 19.3]} \overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2}$线性无关

于是 $V = \langle \overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2} \rangle$

不妨设$f(\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2}) = 1, f$在$\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2}$下的矩阵

$$\begin{pmatrix} f(\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_1}) & f(\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2}) \\ f(\overrightarrow{e_2},\overrightarrow{e_1}) & f(\overrightarrow{e_2},\overrightarrow{e_2}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

设$\vec{x} = x_1\overrightarrow{e_1} + x_2\overrightarrow{e_2}, \vec{y} = y_1\overrightarrow{e_1} + y_2\overrightarrow{e_2}$

$$f(\vec{x},\vec{y}) = (x_1 \quad x_2)\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}$$

【定义 19.1.1】辛平面

设$f \in \mathcal{L}_2^-(V,F), W \subset V$ 是二维子空间，

如果 $\exists \overrightarrow{w_1}, \overrightarrow{w_2} \in W$, 使得$f(\overrightarrow{w_1}, \overrightarrow{w_2}) \neq 0$,

则称 W 是 f 的辛平面(synpletic(共生的) plane)

【引理 19.4】辛平面分解

设$f \in L_2^-(V,F)$, 则 $V = W_1 \oplus \cdots W_m \oplus K$，其中

$(i) W_1, \cdots W_m$ 是辛平面

$(ii) \forall i,j \in \{1,\dots,m\}, \overrightarrow{w_i} \in W_i, \overrightarrow{w_j} \in W_j, f\left(\overrightarrow{w_i}, \overrightarrow{w_j}\right) = 0$

$(iii) K = \{\vec{v} \in V | \forall \vec{x} \in V, f(\vec{x}, \vec{v}) = 0\}$

证：先验证K是V的子空间

设 $\alpha, \beta \in F, \quad \vec{u}, \vec{v} \in K, \quad \vec{x} \in V$

$f(\vec{x}, \alpha\vec{u} + \beta\vec{v}) = \alpha f(\vec{x}, \vec{u}) + \beta f(\vec{x}, \vec{v}) = 0 \Rightarrow \alpha\vec{u} + \beta\vec{v} \in K$

$\Rightarrow K$是V的子空间

当$f = 0$ 时，取$K = V, m = 0$, 引理成立

设$f \neq 0$, 则 $\exists \overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2} \in V$, 使得 $f(\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}) \neq 0$

由引理 19.3, $\quad \overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}$线性无关 $\Rightarrow \dim V \geq 2$

对 $\dim V$ 归纳，当 $\dim V = 2$ 时，由例 19.2 可知

取$W_1 = V, m = 1, K = \{0\}$即可。

设引理对 $\dim V < n$成立，设 $\dim V = k > 2$

$\because f \neq 0, \therefore \exists \overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2} \in V$, 使得 $f(\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}) \neq 0$

令$W_1' = \{\vec{v} \in V | f(\vec{v}, \overrightarrow{v_1}) = f(\vec{v}, \overrightarrow{v_2}) = 0\}$

<u>断言 1</u>

$V = W_1 \oplus W_1'$

断言 1 的证明：设 $\vec{w} \in W_1 \cap W_1'$

因为 $\vec{w} \in W_1$, 所以 $\exists \alpha_1, \alpha_2 \in F$, 使得 $\vec{w} = \alpha_1 \overrightarrow{v_1} + \alpha_2 \overrightarrow{v_2}$

由 $\vec{w} \in W_1'$ 得 $f(\vec{w}, \overrightarrow{v_1}) = f(\alpha_1 \overrightarrow{v_1} + \alpha_2 \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_1}) = 0$

即 $\alpha_1 f(\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_1}) + \alpha_2 f(\overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_1}) = 0$

$\Rightarrow \alpha_2 f(\overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_1}) = 0 \Rightarrow \alpha_2 = 0 \quad [f(\overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_1}) = -f(\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}) \neq 0]$

同理 $\alpha_1 = 0$

于是$W_1 \oplus W_1'$是直和

设 $l_i: V \to F, \qquad \vec{x} \mapsto f(\vec{x}, \overrightarrow{v_i}), \qquad i = 1,2$

$W_1' = \langle l_1, l_2 \rangle^\circ = \dim V - \dim\langle l_1, l_2 \rangle \geq k - 2$

于是 $\dim(W_1 + W_1') = \dim W_1 + \dim W_1{}' \geq n$

$\Rightarrow \dim(W_1 + W_1') = n \Rightarrow V = W_1 \oplus W_1'$

∴ 断言 1 成立

断言 2

$\forall \overrightarrow{w_1} \in W_1, \overrightarrow{w_1'} \in W_1', f\left(\overrightarrow{w_1}, \overrightarrow{w_1'}\right) = 0$

证明：设$\overrightarrow{w_1} = \alpha_1 \overrightarrow{v_1} + \alpha_2 \overrightarrow{v_2}$

$f\left(\overrightarrow{w_1}, \overrightarrow{w_1'}\right) = f\left(\alpha_1 \overrightarrow{v_1} + \alpha_2 \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{w_1'}\right)$

$= -\alpha_1 f\left(\overrightarrow{w_1{}'}, \overrightarrow{v_1}\right) - \alpha_2 f\left(\overrightarrow{w_2'}, \overrightarrow{v_2}\right) = 0 \quad \left[W_1\text{的定义}\right]$

∴ 断言 2 成立

令$g = f\big|_{W_1' \times W_1'}, \qquad$ 即 $g: W_1' \times W_1' \to F, (\vec{x}, \vec{y}) \mapsto f(\vec{x}, \vec{y})$

由归纳假设，$W_1' = W_2 \oplus \cdots \oplus W_m \oplus \widetilde{K}$

其中$(i)'W_2,\dots,W_m$是g的辛平面

$(ii)'\forall i,j\in\{2,..,m\},\overrightarrow{w_i}\in W_i,\overrightarrow{w_j}\in W_j,g\left(\overrightarrow{w_i},\overrightarrow{w_j}\right)=0$

$(iii)'\widetilde{K}=\{\vec{v}\in W_1'|\forall\vec{x}\in W_1',g(\vec{x},\vec{v})=0\}$

于是 $V=W_1\oplus W_2\oplus\cdots\oplus W_m\oplus\widetilde{K}$

下面验证上述分解满足$(i),(ii),(iii)$

由g的定义，$W_2,\dots,W_m$也是f的辛平面，于是(i)满足

由断言 2，$\forall i\in\{2,\dots,m\},\overrightarrow{w_1}\in W_i\subset W_1',f(\overrightarrow{w_1},\overrightarrow{w_i})=0$ $[\overrightarrow{w_1}\in W_1]$

再由$(ii)'$,性质(ii)成立

以下证明 $K=\widetilde{K}$

设$\vec{v}\in K$,由断言 1，$\vec{v}=\alpha_1\overrightarrow{v_1}+\alpha_2\overrightarrow{v_2}+\overrightarrow{w_1{}'}$,

其中$\alpha_1,\alpha_2\in F,\overrightarrow{w_1{}'}\in W_1'$

$0=f(\overrightarrow{v_1},\vec{v})=f\left(\overrightarrow{v_1},\alpha_1\overrightarrow{v_1}+\alpha_2\overrightarrow{v_2}+\overrightarrow{w_1}'\right)$

$=\alpha_1f(\overrightarrow{v_1},\overrightarrow{v_1})+\alpha_2f(\overrightarrow{v_1},\overrightarrow{v_2})+f(\overrightarrow{v_1},\overrightarrow{w_1})$

$=\alpha_2f(\overrightarrow{v_1},\overrightarrow{v_2})\Rightarrow\alpha_2=0$

类似地可证 $\alpha_1=0$

于是$\vec{v}\in W_1'$,由定义得 $\vec{v}\in\widetilde{K}\Rightarrow K\subset\widetilde{K}$

反之，设$\vec{v}\in\widetilde{K},\vec{x}\in V$,　　$\exists y\in W_1,\vec{z}\in W_1'$使得$\vec{x}=\vec{y}+\vec{z}$

$f(\vec{x},\vec{v})=f(\vec{y}+\vec{z},\vec{v})=f(\vec{y},\vec{v})+f(\vec{z},\vec{v})$

$=0$ [断言 2 和$\widetilde{K}$的定义]

$\Rightarrow\vec{v}\in K$,即$K=\widetilde{K}$

由此可知，$(i)(ii)(iii)$都满足，归纳法完成　■

【定理 19.1】斜对称双线性型的规范型

设$f \in \mathcal{L}_2^-(V,F)$,则$V$有一组基

$\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \dots, \overrightarrow{e_{2m-1}}, \overrightarrow{e_{2m}}, \overrightarrow{e_{2m+1}}, \dots, \overrightarrow{e_n}$,

使得f在该组基下的矩阵是

$\mathrm{A} = \mathrm{diag}(S_2, \dots, S_2, 0, \dots, 0)$,其中$S_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

从而$\forall \vec{x} = x_1\overrightarrow{e_1} + \cdots + x_n\overrightarrow{e_n}, \vec{y} = y_1\overrightarrow{e_1} + \cdots + y_n\overrightarrow{e_n} \in V$

$f(\vec{x}, \vec{y}) = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_3 & y_3 \\ x_4 & y_4 \end{vmatrix} + \cdots + \begin{vmatrix} x_{2m-1} & y_{2m-1} \\ x_{2m} & y_{2m} \end{vmatrix}$

证：由引理 19.4

$V = W_1 \oplus W_2 \oplus \cdots \oplus W_m \oplus K \quad [*]$

其中 $W_1, W_2, \dots, W_m$ 由引理 19.4 描述

$\forall i \in \{1, \dots, m\}$,可取 W_i 的基底 $\overrightarrow{e_{2i-1}}, \overrightarrow{e_{2i}}$ 使得 $f(\overrightarrow{e_{2i-1}}, \overrightarrow{e_{2i}}) = 1$

取K的基为$\overrightarrow{e_{2m+1}}, \dots, \overrightarrow{e_n}$,则

$\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \cdots, \overrightarrow{e_{2m-1}}, \overrightarrow{e_{2m}}, \overrightarrow{e_{2m+1}}, \cdots, \overrightarrow{e_n}$是$V$的基$\left[\because [*]\right]$

f在该组基下的矩阵$A = \left(f\left(\overrightarrow{e_i}, \overrightarrow{e_j}\right)\right)_{\substack{i=1,\dots,n \\ j=1,\dots n}}$ ■

【推论 19.1】斜对称矩阵的规范型

设$A \in M_n(F)$斜对称，则

$A \sim_c \mathrm{diag}(S_2, \dots, S_2, 0, \dots, 0)$

证：由定理 19.1 直接可得 ■

【推论 19.2】斜对称矩阵偶数秩

设 $A \in M_n(F)$斜对称，则 $\mathrm{rank}\ A$ 是偶数

证：由推论 19.1 直接可得 ■

【推论 19.3】合同斜对称矩阵等秩

设$A,B\in M_n(F)$斜对称

则$A\sim_c B \Leftrightarrow \operatorname{rank}A=\operatorname{rank}B$

证：由推论 19.1 直接可得 ■

【例 19.1.3】Pfaffian

设$A\in M_{2m}(\mathbb{Z})$斜对称$,\det A\neq 0$

则$\exists k\in\mathbb{Z}$ 使得$\det A=k^2$

证：设$A=\left(a_{ij}\right)_{n\times n}\because a_{ij}\in\mathbb{Z}\therefore \det A\in\mathbb{Z}$

$$\det A=\sum_{\sigma\in S_n}\varepsilon_\sigma\prod_{t=1}^{n}a_{t\sigma(t)}$$

$A\in M_n(\mathbb{Z})\subset M_n(\mathbb{Q}),\qquad$ 由推论 19.1$,\exists C\in GL_n(\mathbb{Q})$使得

$A=C^t\operatorname{diag}(S_2,\dots,S_2,0,\dots,0)\,C$

$\therefore |A|=|C|^2$

$\because |A|\in\mathbb{Z},|C|\in\mathbb{Q}\therefore |C|\in\mathbb{Z},$令$k=|C|$ 即可 ■

$$\left[|C|=\frac{p}{q},p,q\in\mathbb{Z},\gcd(p,q)=1\Rightarrow |C|^2=\frac{p^2}{q^2},\gcd(p^2,q^2)=1\right]$$

注：称$|C|$为$|A|$的 Pffafian，记为 $\operatorname{Pf}(A)$

§10-19 节小结

① $A,B\in M_n(F)$,如果存在$C\in GL_n(F)$使得$B=C^tAC$,

则称$A\sim_c B$

② A对称 $\Leftrightarrow A\sim\mathrm{diag}(\lambda_1,\dots,\lambda_r,0,\dots,0)$,

$F=\mathbb{C}\Rightarrow A\sim_c\begin{pmatrix}E_r & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$, $\quad F=\mathbb{R}\Rightarrow A\sim_c\begin{pmatrix}E_s & 0 & 0\\ 0 & -E_t & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$

正定 $\Leftrightarrow s=n$,半正定 $\Rightarrow t=0$,负定 $\Leftrightarrow t=n$,半负定 $\Rightarrow s=0$

$A\in M_n(F)$斜对称,定理 19.1 推论 19.1

齐二次多项式通过线性变量替换（仿射）有规范形

二次联立方程组和三次及以上多项式属于非线性

$L_2(V,F)=L_2^+(V,F)\oplus L_2^-(V,F)$

$$A=\overbrace{\left(\frac{A+A^t}{2}\right)}^{M}+\overbrace{\left(\frac{A-A^t}{2}\right)}^{N}=P^tMP+Q^tNQ$$

第二章 线性算子

在本章中，F是域，特征任意，F上的线性空间U, V, W都是有限维的

§1 线性映射的矩阵

设V,W是F上的线性空间， $\mathrm{Hom}(V,W)$ 是从V到W的线性映射的集合

它是F上的线性空间.

§1.1 矩阵表示

【定义 1.1.1】线性映射的矩阵

设$\overrightarrow{e_1},\dots,\overrightarrow{e_n}$是$V$的基，$\overrightarrow{\varepsilon_1},\dots,\overrightarrow{\varepsilon_m}$是$W$的基,$\varphi\in\mathrm{Hom}(V,W)$

$$\forall j\in\{1,\dots,n\},\varphi\left(\overrightarrow{e_j}\right)=\sum_{i=1}^{m}a_{ij}\overrightarrow{\varepsilon_j}$$

令$A=\left(a_{ij}\right)_{m\times n}$,则$\left(\varphi(\overrightarrow{e_1}),\dots,\varphi(\overrightarrow{e_n})\right)=(\overrightarrow{\varepsilon_1},\dots,\overrightarrow{\varepsilon_m})A$

A的唯一性由$\overrightarrow{\varepsilon_1},\dots,\overrightarrow{\varepsilon_m}$的线性无关性决定,

称A为φ在$\overrightarrow{e_1},\dots,\overrightarrow{e_n};\overrightarrow{\varepsilon_1},\dots,\overrightarrow{\varepsilon_m}$下的矩阵

设$\vec{x}=x_1\overrightarrow{e_1}+\cdots+x_n\overrightarrow{e_n}\in V,\qquad \varphi(\vec{x})=y_1\overrightarrow{\varepsilon_1}+\cdots+y_m\overrightarrow{\varepsilon_m}\in W$

$$\begin{aligned}\text{则}\varphi(\vec{x})&=x_1\varphi(\overrightarrow{e_1})+\cdots+x_n\varphi(\overrightarrow{e_n})\\&=\left(\varphi(\overrightarrow{e_1}),\dots,\varphi(\overrightarrow{e_n})\right)\begin{pmatrix}x_1\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}\\&=(\overrightarrow{\varepsilon_1}\quad\overrightarrow{\varepsilon_2}\quad\dots\quad\overrightarrow{\varepsilon_m})A\begin{pmatrix}x_1\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}\end{aligned}$$

$$\text{则}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\\vdots\\y_m\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}$$

§1.2 线性映射的秩

【例 1.2.1】线性映射矩阵的基变换公式

设$\overrightarrow{e_1},\dots,\overrightarrow{e_n}$是$V$的基，$\overrightarrow{\varepsilon_1},\dots,\overrightarrow{\varepsilon_m}$是$W$的基

设$\overrightarrow{e_1}',\dots,\overrightarrow{e_n}'$是$V$的另一组基，$\overrightarrow{\varepsilon_1}',\dots,\overrightarrow{\varepsilon_m}'$是$W$的另一组基，且

$(\overrightarrow{e_1}',\dots,\overrightarrow{e_n}') = (\overrightarrow{e_1},\dots,\overrightarrow{e_n})B,\qquad (\overrightarrow{\varepsilon_1}',\dots,\overrightarrow{\varepsilon_m}') = (\overrightarrow{\varepsilon_1},\dots,\overrightarrow{\varepsilon_m})C$

其中B,C均可逆

$\left(\varphi(\overrightarrow{e_1}'),\dots,\varphi(\overrightarrow{e_n}')\right) \triangleq \varphi\left((\overrightarrow{e_1}',\dots,\overrightarrow{e_n}')\right)$

$= \varphi\left((\overrightarrow{e_1},\dots,\overrightarrow{e_n})B\right) = \left(\varphi(\overrightarrow{e_1}),\dots,\varphi(\overrightarrow{e_n})\right)B$

$= (\overrightarrow{\varepsilon_1},\dots,\overrightarrow{\varepsilon_m})AB$

$= \left((\overrightarrow{\varepsilon_1}',\dots,\overrightarrow{\varepsilon_m}')\right)C^{-1}AB$

φ在$\left(\overrightarrow{e_1}',\dots,\overrightarrow{e_n}'\right);\left(\overrightarrow{\varepsilon_1}',\dots,\overrightarrow{\varepsilon_m}'\right)$下的矩阵是$C^{-1}AB$

$\Rightarrow \operatorname{rank} A = \operatorname{rank}(C^{-1}AB)$

【定义 1.2.1】线性映射的秩

设$\varphi \in \operatorname{Hom}(V,W)$，$A \in F^{m\times n}$是$\varphi$在$V$和$W$某组基下的矩阵，

则φ的秩定义为$\operatorname{rank} A$，记为$\operatorname{rank}\varphi$

【例 1.2.2】多项式求导的矩阵

$\varphi: \mathbb{R}_n[x] \to \mathbb{R}_n[x], f(x) \mapsto f'(x)$

取基底$(\overrightarrow{e_1},\dots,\overrightarrow{e_n}) = (1,x,\dots,x^{n-1});(\overrightarrow{\varepsilon_1},\dots,\overrightarrow{\varepsilon_n}) = (1,\dots,x^{n-1})$

$\left(\varphi(1),\varphi(x),\dots,\varphi(x^{n-1})\right) = (0,1,2x,\dots,(n-1)x^{n-2})$

$$= (1, x, \dots, x^{n-1}) \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n-1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{A}, \qquad \operatorname{rank}\varphi = n-1$$

【例 1.2.2】矩阵乘法的矩阵

设$P \in F^{k\times m}, \varphi: F^{m\times n} \to F^{k\times n}, \qquad X \mapsto PX, \qquad$ 求 $\operatorname{rank}\varphi$

$\varphi(X) = PX = P\left(\overrightarrow{X^{(1)}}, \dots, \overrightarrow{X^{(n)}}\right) = \left(P\overrightarrow{X^{(1)}}, \dots, P\overrightarrow{X^{(n)}}\right)$

于是

$\left(\overrightarrow{\varphi(X)^{(1)}}, \dots, \overrightarrow{\varphi(X)^{(n)}}\right) = \left(P\overrightarrow{X^{(1)}}, \dots, P\overrightarrow{X^{(n)}}\right)$

$$\begin{pmatrix} \overrightarrow{\varphi(x)^{(1)}} \\ \vdots \\ \overrightarrow{\varphi(x)^{(n)}} \end{pmatrix} = \overbrace{\begin{pmatrix} P & & & \\ & P & & \\ & & \ddots & \\ & & & P \end{pmatrix}}^{A} \begin{pmatrix} \overrightarrow{X^{(1)}} \\ \vdots \\ \overrightarrow{X^{(n)}} \end{pmatrix}$$

$A \in F^{kn\times mn}, \operatorname{rank} A = n \operatorname{rank} P$

$F^{m\times n}$的基$E_{ij}: i \in \{1, \dots, m\}, j \in \{1, \dots, n\}$

在i行j列处元素为 1，其他处为 0

$F^{k\times n}$的基$\varepsilon_{pq}: p \in \{1, \dots, k\}, q \in \{1, \dots, n\}$

在p行q列处元素为 1，其他处为 0

【命题 1.1】线性映射秩等于像维数

设$\varphi \in \operatorname{Hom}(V, W)$，则 $\operatorname{rank}\varphi = \dim \operatorname{im}\varphi$

证：设 A 是 φ 在 V 的基底 $\overrightarrow{e_1}, \dots, \overrightarrow{e_n}$; W的基底 $\overrightarrow{\varepsilon_1}, \dots, \overrightarrow{\varepsilon_m}$ 下的矩阵

$\vec{x} = x_1\overrightarrow{e_1} + \cdots + x_n\overrightarrow{e_n} \in V$

$\vec{x} \in \ker \varphi \Leftrightarrow A\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \qquad [*]$(坐标形式)

$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$在$[*]$的解空间中

$\dim \ker \varphi = n - \operatorname{rank} A = n - \operatorname{rank} \varphi$

由线性映射维数公式

$\dim \ker \varphi + \dim \operatorname{im} \varphi = n \Rightarrow \operatorname{rank} \varphi = \dim \operatorname{im} \varphi \qquad \blacksquare$

$\varphi: \mathbb{R}_n[x] \to \mathbb{R}_n[x], f(x) \mapsto f^{'}(x), \operatorname{im} \varphi = \mathbb{R}_{n-1}[x]$

【推论 1.1】线性映射的秩判定单满射

设$\varphi \in Hom(V, W)$, 其中 $\dim V = n, \dim W = m$, 则

(i) φ是单射 $\Leftrightarrow \operatorname{rank} \varphi = n$

(ii) φ是满射 $\Leftrightarrow \operatorname{rank} \varphi = m$

证：(i)由线性映射维数公式

$\dim \ker \varphi + \dim \operatorname{im} \varphi = n$

再由命题 1.1 得， $\dim \ker \varphi + \operatorname{rank} \varphi = n$

$\operatorname{rank} \varphi = n \Leftrightarrow \dim \ker \varphi = 0$

$\Leftrightarrow \ker \varphi = \{\vec{0}\} \Leftrightarrow \varphi$是单射 [第一章定理 6.1]

$(ii) \operatorname{rank} \varphi = m \Leftrightarrow \dim \operatorname{im} \varphi = m \Leftrightarrow \operatorname{im} \varphi = W$

$[\mathrm{im}\ \varphi \subset \mathrm{W}, \dim im\, \varphi = \dim W = m] \qquad \blacksquare$

§1.3 线性同构

【定理 1.1】线性映射集合与矩阵空间同构

设 $\dim V = n, \dim W = m$, 则 $\mathrm{Hom}(V,W)$ 与 $F^{m\times n}$ 线性同构

特别地， $\dim(\mathrm{Hom}(V,W)) = mn$

证：设V的一组基是 $\overrightarrow{e_1},\dots,\overrightarrow{e_n}$,W的一组基是 $\overrightarrow{\varepsilon_1},\dots,\overrightarrow{\varepsilon_m}$

$\Phi\colon \mathrm{Hom}(V,W) \to F^{m\times n}, \varphi \mapsto A_\varphi$

其中 A_φ 是 φ 在$\overrightarrow{e_1},\dots,\overrightarrow{e_n};\overrightarrow{\varepsilon_1},\dots,\overrightarrow{\varepsilon_m}$ 下的矩阵

设 $\varphi_1,\varphi_2 \in Hom(V,W)$, 则

$\left((\varphi_1+\varphi_2)(\overrightarrow{e_1}),\dots,(\varphi_1+\varphi_2)(\overrightarrow{e_n})\right)$

$= (\varphi_1(\overrightarrow{e_1})+\varphi_2(\overrightarrow{e_1}),\dots,\varphi_1(\overrightarrow{e_n})+\varphi_2(\overrightarrow{e_n}))$

$= (\varphi_1(\overrightarrow{e_1}),\dots,\varphi_1(\overrightarrow{e_n}))+(\varphi_2(\overrightarrow{e_1}),\dots,\varphi_2(\overrightarrow{e_n}))$

$= (\overrightarrow{\varepsilon_1},\dots,\overrightarrow{\varepsilon_m})A_{\varphi_1}+(\overrightarrow{\varepsilon_1},\dots,\overrightarrow{\varepsilon_m})A_{\varphi_2}$

$= (\overrightarrow{\varepsilon_1},\dots,\overrightarrow{\varepsilon_m})\left(A_{\varphi_1}+A_{\varphi_2}\right)$

$\Phi(\varphi_1+\varphi_2) = A_{\varphi_1}+A_{\varphi_2} = \Phi(\varphi_1)+\Phi(\varphi_2)$

类似地可验证 $\forall\alpha\in F, \varphi\in Hom(V,W), \Phi(\alpha\varphi) = \alpha\Phi(\varphi)$

于是Φ是线性映射。

设$\varphi\in\ker\Phi$, 则 $A_\varphi = 0_{m\times n}$,　　于是 $\forall i\in\{1,\dots,n\}, \varphi(\overrightarrow{e_i}) = \overrightarrow{0_W}$

$\Rightarrow \varphi$是零映射 $\Rightarrow \Phi$是单射　[第一章定理 6.1]

设$B\in F^{m\times n}$,　　$\vec{x} = x_1\overrightarrow{e_1}+\cdots+x_n\overrightarrow{e_n}$

定义 $\psi\colon V\to W$,　　$\vec{x}\mapsto (\overrightarrow{\varepsilon_1}\quad\cdots\quad\overrightarrow{\varepsilon_m})B\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}$

则 $A_\psi = B$, 即 $\Phi(\psi) = B, \Phi$是满射

由第一章命题 8.1，Φ是线性同构　■

§1.4 线性映射的复合

设$\varphi \in Hom(U,V), \psi \in Hom(V,W)$

$$U \xrightarrow{\varphi} V \xrightarrow{\psi} W, \qquad \psi\circ\varphi \in Hom(V,W)$$
$$U \xrightarrow{\psi\circ\varphi} W$$

【定理 1.2】复合映射的矩阵

设 $\varphi \in \mathrm{Hom}(U,V), \psi \in Hom(V,W)$,

$\overrightarrow{e_1},\dots,\overrightarrow{e_n};\overrightarrow{\varepsilon_1},\dots,\overrightarrow{\varepsilon_n};\overrightarrow{\delta_1},\dots,\overrightarrow{\delta_k}$分别是$U,V,W$的基底.

设 A 是 φ 在 $\overrightarrow{e_1},\dots,\overrightarrow{e_n};\overrightarrow{\varepsilon_1},\dots,\overrightarrow{\varepsilon_m}$下的矩阵

B 是 ψ 在$\overrightarrow{\varepsilon_1},\dots,\overrightarrow{\varepsilon_m},\overrightarrow{\delta_1},\dots,\overrightarrow{\delta_k}$下的矩阵，则$A \in F^{m\times n}, B \in F^{k\times m}$

则$\psi\circ\varphi$在$\overrightarrow{e_1},\dots,\overrightarrow{e_n},\overrightarrow{\delta_1},\dots,\overrightarrow{\delta_k}$下的矩阵是$BA$

注：记$\varphi=\varphi_A, \psi=\varphi_B,\qquad$ 则$\varphi_B\circ\varphi_A=\varphi_{BA}$

证：利用坐标，设$\vec{x}=x_1\overrightarrow{e_1}+\cdots+x_n\overrightarrow{e_n}$,

$\varphi(\vec{x})=y_1\overrightarrow{\varepsilon_1}+\cdots+y_m\overrightarrow{\varepsilon_m}$

$\psi(\vec{y})=\psi\big(\varphi(\vec{x})\big)=z_1\overrightarrow{\delta_1}+\cdots+z_k\overrightarrow{\delta_k}$

$$\begin{pmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_m\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix}z_1\\ \vdots\\ z_k\end{pmatrix}=B\begin{pmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_m\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}z_1\\ \vdots\\ z_k\end{pmatrix}=BA\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}$$

$\Rightarrow BA$ 是$\psi\circ\varphi$在$\overrightarrow{e_1},\dots,\overrightarrow{e_n};\overrightarrow{\delta_1},\dots.,\overrightarrow{\delta_k}$下的矩阵 ■

【定理 1.3】像集维数的不等式

设$\varphi \in Hom(U,V), \psi \in Hom(V,W)$

(i)设Z是U的子空间，则 $\dim Z \ge \dim\big(\varphi(Z)\big)$

(ii)对任意线性映射P, 用I_p简记$\mathrm{im}\, p$

则 $\dim I_{\psi\circ\varphi} \le \min\{\dim I_\varphi, \dim I_\psi\}$

证：(i)设$\overrightarrow{v_1},\dots,\overrightarrow{v_d}$是$Z$的基，则$\varphi(Z)=\langle\varphi(\overrightarrow{v_1}),\dots,\varphi(\overrightarrow{v_d})\rangle$

$\dim Z = d$且$\dim \varphi(Z) \le d$, (i)成立

(ii)[利用核]设 $K_\varphi = \ker\varphi$, $K_\psi = \ker\psi$, $K_\varphi \subset K_{\psi\circ\varphi}$

[设$\vec{u} \in K_\varphi \Rightarrow \varphi(\vec{u}) = \overrightarrow{0_V}, \psi\circ\varphi(\vec{u}) = \overrightarrow{0_W} \Rightarrow \vec{u} \in \ker\psi\circ\varphi$]

$\dim K_\varphi + \dim I_\varphi = \dim K_{\psi\circ\varphi} + \dim I_{\psi\circ\varphi} = \dim U$

$\dim K_\varphi \le \dim K_{\psi\circ\varphi} \Rightarrow \dim I_\varphi \ge \dim I_{\psi\circ\varphi}$

$I_{\psi\circ\varphi} = \psi\left(I_\varphi\right)$ 由(i) $\dim I_\varphi \ge \dim I_{\psi\circ\varphi}$ ■

注：设 A, B 分别是 φ, ψ 在$\overrightarrow{e_1}, \dots, \overrightarrow{e_n}; \overrightarrow{\varepsilon_1}, \dots, \overrightarrow{\varepsilon_m}$ 下的矩阵

$\psi\circ\varphi$的矩阵是BA

$\operatorname{rank} BA \le \min(\operatorname{rank} A, \operatorname{rank} B)$

【例 1.4.1】矩阵行列满秩分解

设$M \in F^{m\times n}$,如果$\operatorname{rank} M = m$，则称 M 行满秩；

如果$\operatorname{rank} M = n$，则称 M 列满秩；

设$A \in F^{m\times n}$,证明$A = BC$，其中B列满秩，C行满秩

证：(矩阵法)

设 $r = \operatorname{rank} A$，由初等行列变换可知

$\exists P \in GL_m(F), Q \in GL_n(F)$,使得 $A = P\begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_{m\times n} Q$

$$A = \underbrace{P\begin{pmatrix} E_r \\ 0 \end{pmatrix}_{m\times r}}_{B} \underbrace{(E_r \quad 0)_{r\times n} Q}_{C} = BC$$

$B \in F^{m\times r}, C \in F^{r\times n}$

$\operatorname{rank} B = r \Rightarrow$ 列满秩；$\operatorname{rank} C = n \Rightarrow$ 行满秩 ■

(映射法)

$\varphi_A: F^n \to F^m, \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mapsto A\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$,

则 A 是 φ_A 在 F^n 和 F^m 标准基下的矩阵。

$F^n \xrightarrow{\pi[满]} F^n/_{\ker\varphi_A} \xrightarrow{\overline{\varphi_A}[单]} F^m$

$F^n \quad \xrightarrow{\varphi_A} \quad F^m$

由线性映射分解定理，$\varphi_A = \overline{\varphi_A} \circ \pi$

其中 π 为满射，$\overline{\varphi_A}$ 是单射

设 $\overrightarrow{\varepsilon_1}, \dots, \overrightarrow{\varepsilon_s}$ 是 $F^n/_{\ker\varphi_A}$ 的一组基，

π 在F^n 的标准基和 $\overrightarrow{\varepsilon_1}, \dots, \overrightarrow{\varepsilon_s}$ 下的矩阵为$C \in F^{s\times n}$

π满射 $\Rightarrow C$行满秩

设 $\overline{\varphi_A}$ 是 $\overrightarrow{\varepsilon_1}, \dots, \overrightarrow{\varepsilon_s}$ 和 F^n 的标准基下的矩阵 $B \in F^{m\times s}$

$\overline{\varphi_A}$单射，B列满秩

由定理 1.2，$A = BC$ ■

§1.5 线性映射的标准型

【回忆】初等变换

初等变换：设$A \in F^{m\times n}, r = \operatorname{rank} A$，则

$\exists P \in GL_n(F), Q \in GL_n(F)$，使得

$PAQ = \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_{m\times n}$

【定理 1.4】线性映射的标准型

设 $\varphi \in \operatorname{Hom}(V, W)$，则在$V$和$W$的某组基下，$\varphi$的矩阵是

$\begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in F^{m\times n}$

证：设 $\overrightarrow{e_1}, \dots, \overrightarrow{e_n}$是 V 的一组基，$\overrightarrow{\varepsilon_1}, \dots, \overrightarrow{\varepsilon_m}$是 W 的一组基

φ 在这两组基下的矩阵设为 A，由初等行列变换可知

$\exists P \in GL_m(F), Q \in GL_n(F)$，使得 $PAQ = \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_{m\times n}$

设 $(\overrightarrow{\varepsilon_1'} \quad \cdots \quad \overrightarrow{\varepsilon_m'}) = (\overrightarrow{\varepsilon_1} \quad \cdots \quad \overrightarrow{\varepsilon_m})P^{-1}$

$(\overrightarrow{e_1'} \quad \cdots \quad \overrightarrow{e_n'}) = (\overrightarrow{e_1} \quad \cdots \quad \overrightarrow{e_n})Q$

则 $(\overrightarrow{\varepsilon_1'} \quad \cdots \quad \overrightarrow{\varepsilon_m'})$ 是W的基 $[\because P^{-1}$可逆$]$

$(\overrightarrow{e_1'} \quad \cdots \quad \overrightarrow{e_n'})$是$V$的基 $[\because Q$可逆$]$

于是 φ 在 $\overrightarrow{e_1'} \quad \cdots \quad \overrightarrow{e_n'}; \overrightarrow{\varepsilon_1'} \quad \cdots \quad \overrightarrow{\varepsilon_m'}$ 下的矩阵为

$PAQ = \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ■

§1.6 对偶映射

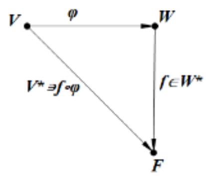
【定义 1.6.1】对偶映射

设 V^*,W^* 分别是V,W的对偶空间，$\varphi\in\mathrm{Hom}(V,W)$

$\forall f\in W^*$,有 $f\circ\varphi\in V^*$

由此得到映射 $\varphi^*:W^*\to V^*,f\mapsto f\circ\varphi$

φ^*称为 φ 的对偶映射



【定理 1.5】对偶映射的基

设$\varphi\in\mathrm{Hom}(V,W)$,则$\varphi^*\in\mathrm{Hom}(W^*,V^*)$

再设 $\overrightarrow{e_1},\dots,\overrightarrow{e_n}$; $\overrightarrow{\varepsilon_1},\dots,\overrightarrow{\varepsilon_m}$ 分别为 V 和 W 的基，

φ 在这两组基下的矩阵是A，

则 φ^* 在它们的对偶基 $\overrightarrow{\varepsilon_1^*},\dots,\overrightarrow{\varepsilon_m^*}$; $\overrightarrow{e_1^*},\dots,\overrightarrow{e_n^*}$ 下的矩阵是A^t

证：先验证 $\varphi^*\in\mathrm{Hom}(W^*,V^*)$

设 $\alpha,\beta\in F,\qquad f,g\in W^*$

$\varphi^*(\alpha f+\beta g)=(\alpha f+\beta g)\circ\varphi,\qquad$ 对$\forall\vec{x}\in V$,

$$\begin{aligned}(\alpha f+\beta g)\circ\varphi(\vec{x})&=(\alpha f+\beta g)\big(\varphi(\vec{x})\big)\\&=\alpha f\big(\varphi(\vec{x})\big)+\beta g\big(\varphi(\vec{x})\big)\\&=\alpha(f\circ\varphi)(\vec{x})+\beta(g\circ\varphi)(\vec{x})\\&=\big(\alpha\varphi^*(f)+\beta\varphi^*(g)\big)(\vec{x})\end{aligned}$$

$\Rightarrow\varphi^*(\alpha f+\beta g)=\alpha\varphi^*(f)+\beta\varphi^*(g)$

于是 $\varphi^*\in\mathrm{Hom}(W^*,V^*)$

设$A=\left(a_{ij}\right)_{\substack{i=1,\dots,m,\\ j=1,\dots,n}}$

是 φ 在 $\overrightarrow{e_1},\dots,\overrightarrow{e_n}$; $\overrightarrow{\varepsilon_1},\dots,\overrightarrow{\varepsilon_m}$ 下的矩阵

设$B=(b_{kl})_{\substack{k=1,\dots,n\\ l=1,\dots,m}}$

是φ^* 在 $\overrightarrow{\varepsilon_1^*}, \dots, \overrightarrow{\varepsilon_m^*}; \overrightarrow{e_1^*}, \dots, \overrightarrow{e_n^*}$ 下的矩阵

$$\overrightarrow{\varepsilon_l^*} \circ \varphi = \varphi^*\left(\overrightarrow{\varepsilon_l^*}\right) = \sum_{k=1}^{n} b_{kl}\overrightarrow{e_k^*}$$

$$\overrightarrow{\varepsilon_l^*} \circ \varphi\left(\overrightarrow{e_j}\right) = \overrightarrow{\varepsilon_l^*}\left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij}\overrightarrow{\varepsilon_\iota}\right) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij}\left(\overrightarrow{\varepsilon_l^*}\left(\overrightarrow{\varepsilon_\iota}\right)\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} a_{ij}\delta_{li} = a_{lj}\delta_{ll} = a_{lj}$$

$$\left(\sum_{k=1}^{n} b_{kl}\overrightarrow{e_k^*}\right)\left(\overrightarrow{e_j}\right) = \sum_{k=1}^{n} b_{kl}\overrightarrow{e_k^*}\left(\overrightarrow{e_j}\right) = \sum_{k=1}^{n} b_{kl}\delta_{kj} = b_{jl}\delta_{jj} = b_{jl}$$

$$\Rightarrow a_{lj} = b_{jl}, \qquad j \in (1, \dots, n), l \in \{1, \dots, m\}$$

$$\Rightarrow B = A^t \quad \blacksquare$$

§2 线性算子代数

【记号】

$\mathrm{Hom}(V,V)$ 记为 $\mathcal{L}(V)$,

$\mathcal{L}(V)$中的元素称为线性算子,

用$\mathcal{A},\mathcal{B},\mathcal{C},\dots$来表示。

§2.1 矩阵的相似

【例 2.1.1】线性算子的换基公式

设 $\mathcal{A}\in\mathcal{L}(V)$,　　V的一组基是 $\overrightarrow{e_1},\dots,\overrightarrow{e_n}$,

则 $\mathcal{A}$ 在 $\overrightarrow{e_1},\dots,\overrightarrow{e_n}$; $\overrightarrow{e_1},\dots,\overrightarrow{e_n}$ 下的矩阵为A

简称为 $\mathcal{A}$ 在$\overrightarrow{e_1},\dots,\overrightarrow{e_n}$下的矩阵

再设 $\overrightarrow{e_1{}'},\dots,\overrightarrow{e_n{}'}$ 是 V 的另一组基，令 $\left(\overrightarrow{e_1{}'},\dots,\overrightarrow{e_n{}'}\right)=(\overrightarrow{e_1},\dots,\overrightarrow{e_n})P$

其中 $P\in GL_n(F)$, 则 $\mathcal{A}$ 在$\overrightarrow{e_1{}'},\dots,\overrightarrow{e_n{}'}$ 下的矩阵是 $P^{-1}AP$

【定义 2.1.1】相似等价关系

设 $A,B\in M_n(F)$, 如果存在$P\in GL_n(F)$使得

$B=P^{-1}AP$

则B与A相似，记为 $B\sim_s A$

验证：$\sim_s$是等价关系

$\forall A\in M_n(F), A=E^{-1}AE\Rightarrow A\sim_s A$　　[自反]

设$A,B\in M_n(F), B\sim_s A$, 则 $\exists P\in GL_n(F)$

使得 $B=P^{-1}AP\Rightarrow A=PAP^{-1}=(P^{-1})^{-1}AP^{-1}$

$\Rightarrow A\sim_s B$　[对称]

再设 $C \in M_n(F), A \sim_s B, B \sim_s C$

则 $\exists P, Q \in GL_n(F)$ 使得

$A = P^{-1}BP, B = Q^{-1}CQ$

$A = P^{-1}(Q^{-1}CQ)P = (P^{-1}Q^{-1})C(QP) = (QP)^{-1}C(QP)$

$\Rightarrow A \sim_s C$ [传递]

【本章的目的】

给定$\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$, 求 V 的一组基,

使得 $\mathcal{A}$ 在该基下的矩阵尽可能“简单”

给定$A \in M_n(F)$, 求A的相似意义下的“规范型”

【命题 2.1】若干相似不变量

设$A, B \in M_n(F)$, $A \sim_s B$, 则

(i) $\operatorname{rank} A = \operatorname{rank} B$

(ii) $\operatorname{tr} A = \operatorname{tr} B$

(iii) $\det A = \det B$

证：设$A = P^{-1}BP$, 其中$P \in GL_n(F)$

$\Rightarrow \operatorname{rank} A = \operatorname{rank} B$ (i)成立

$\operatorname{tr} A = \operatorname{tr}(P^{-1}BP) = \operatorname{tr}\big(B(PP^{-1})\big) = \operatorname{tr} B$ (ii)成立

$|A| = |P^{-1}BP| = |P^{-1}||B||P| = |B|$ (iii)成立 ■

【例 2.1.2】不相似的判定

$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \nsim_s \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ 由命题 2.1(i)

$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \nsim_s \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ 由命题 2.1(ii)

$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \nsim_s \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$…. 由命题 2.1$(iii)$

【例 2.1.3】解方程判定不相似

证明：$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$与$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$不相似

设$S = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in GL_2(F)$ 使得

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = S^{-1}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} S \Rightarrow S\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} S$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+c & b+d \\ c & d \end{pmatrix}$$

$a = a + c \Rightarrow c = 0, \qquad b = b + d \Rightarrow d = 0 \Rightarrow S$不可逆，矛盾。 ■

§2.2 线性算子的若干例子

【例 2.2.1】零算子和恒同算子

零算子 $\mathcal{O}: V \to V, \quad \vec{v} \mapsto \vec{0}$

它在任何基下的矩阵都是$O_{n\times n}$，简记为 O

恒同算子 $\mathcal{E}: V \to V, \quad \vec{v} \mapsto \vec{v}$ 恒同

它在任何基下的矩阵都是E_n，简记为E

【例 2.2.2】平行投影算子

设 $V = U \oplus W, \quad U, W$是子空间，

$\forall \vec{v} \in V, \exists! \vec{u} \in U, \vec{w} \in W$，使得 $\vec{v} = \vec{u} + \vec{w}$

$P_U: V \to V, \quad \vec{v} \mapsto \vec{u}$ 称为从 V 到 U 沿着 W 的平行投影

$P_u \circ P_u(\vec{v}) = P_u(\vec{u}) = \vec{u}$

则$P_u \circ P_u = P_u$ [幂等]

【一些记号】算子的幂

设$\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V), k \in \mathbb{Z}^+, \underbrace{A \circ A \circ \cdots \circ A}_{k}$记为$A^k, A^0 = \mathcal{E}$

可验证 $\forall i, j \in \mathbb{N}, A^i \circ A^j = A^{i+j}$

【定义 2.2.1】幂等

设 $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$，如果$\mathcal{A}^2 = \mathcal{A}$，则称 $\mathcal{A}$ 为幂等的。

同样，$A \in M_n(F)$，如果 $A^2 = A$，则称A是幂等的。

【例 2.2.3】差分算子

$\triangle: F_n[x] \to F_n[x], \quad f(x) \mapsto f(x+1) - f(x)$

因为线性变量替换是线性的，且 $\mathcal{L}(V)$为线性空间，所以

$\triangle \in \mathcal{L}(F_n[x])$

当$i \neq 0$ 时， $\triangle x^i = (x+1)^i - x^i, \deg \triangle x^i < \deg x^i$

当$i = 0, \triangle x^0 = 1 - 1 = 0$

$\Rightarrow \forall f \in F_n[x], \triangle^n (f) = 0$

【定义 2.2.2】幂零

设$\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$, 如果 $\exists k \in \mathbb{Z}^+$, 使得 $\mathcal{A}^k = \mathcal{O}$

则称 $\mathcal{A}$ 是幂零的。类似地可以定义幂零矩阵。

§2.3 代数同构

【引理 2.1】线性算子环

$(\mathcal{L}(V),+,\mathcal{O},\circ,\mathcal{E})$是环

且 $\forall\alpha,\beta\in F,\mathcal{A},\mathcal{B}\in\mathcal{L}(V)$,

$(\alpha\mathcal{A})\circ(\beta\mathcal{B})=\alpha\beta(\mathcal{A}\circ\mathcal{B})\qquad[*]$

证：$\because\mathcal{L}(V)$是线性空间 $\therefore(\mathcal{L}(V),+,\mathcal{O})$ 是交换群

$\forall\mathcal{A},\mathcal{B},\mathcal{C}\in\mathcal{L}(V)$,

$\mathcal{A}\circ\mathcal{B}\in\mathcal{L}(V)$ [定理 1.2]

$\mathcal{A}\circ(\mathcal{B}\circ\mathcal{C})=(\mathcal{A}\circ\mathcal{B})\circ\mathcal{C}$ [结合律]

$\mathcal{A}\circ\mathcal{E}=\mathcal{E}\circ\mathcal{A}=\mathcal{A}$

下面验证分配律，$\forall v\in V$

$\mathcal{A}\circ(\mathcal{B}+\mathcal{C})(\vec{v})=\mathcal{A}((\mathcal{B}+\mathcal{C})(\vec{v}))=\mathcal{A}\big(\mathcal{B}(\vec{v})+\mathcal{C}(\vec{v})\big)$

$=\mathcal{A}\big(\mathcal{B}(\vec{v})\big)+\mathcal{A}\big(\mathcal{C}(\vec{v})\big)=\mathcal{A}\circ\mathcal{B}(\vec{v})+\mathcal{A}\circ\mathcal{C}(\vec{v})$

$=(\mathcal{A}\circ\mathcal{B}+\mathcal{A}\circ\mathcal{C})(\vec{v})$

于是$\mathcal{A}\circ(\mathcal{B}+\mathcal{C})=\mathcal{A}\circ\mathcal{B}+\mathcal{A}\circ\mathcal{C}$

同理可验证 $(\mathcal{A}+\mathcal{B})\circ\mathcal{C}=\mathcal{A}\circ\mathcal{C}+\mathcal{B}\circ\mathrm{C}$

最后验证[*]

$(\alpha\mathcal{A})\circ(\beta\mathcal{B})(\vec{v})=\alpha\mathcal{A}\big(\beta\mathcal{B}(\vec{v})\big)=\alpha\beta(\mathcal{A}\circ\mathcal{B})(\vec{v})$

$\Rightarrow(\alpha\mathcal{A}\circ\beta\mathcal{B})=\alpha\beta\mathcal{A}\circ\mathcal{B}\qquad\blacksquare$

【定理 2.1】线性算子环到矩阵的同构

设$\overrightarrow{e_1},\dots,\overrightarrow{e_n}$是$V$的一组基，

$\Phi:\mathcal{L}(V)\to M_n(F),\qquad\mathcal{A}\mapsto A$

其中 A 是 $\mathcal{A}$ 在$\overrightarrow{e_1},\dots,\overrightarrow{e_n}$下的矩阵

则 Φ 既是线性同构又是环同构$\left(\text{简称代数同构}\right)$

证：由定理 1.1 及其证明，Φ是线性同构

由 2.2 节，$\Phi(\mathcal{E}) = E$

由定理 1.2，$\Phi(\mathcal{A} \circ \mathcal{B}) = AB$

于是Φ是环同构 ■

§2.4 极小多项式

【定义 2.4.1】线性算子多项式

设$\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$, 令$F[\mathcal{A}] = \langle A^0, A^1, \dots \rangle \subset \mathcal{L}(V)$

设$A \in M_n(F), F[A] = \langle A^0, A^1, \dots \rangle \subset M_n(F)$

【命题 2.2】矩阵和线性算子空间的交换子环

(i) 设 $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$, 则 $\dim F[\mathcal{A}] \le n^2$ 且 $F[\mathcal{A}]$ 是 $\mathcal{L}[V]$ 的交换子环

(ii)设 $A \in M_n(F)$, 则 $\dim F[A] \le n^2$, 且 $F[A]$ 是 $M_n(F)$ 的交换子环

证：$(i) \because F[\mathcal{A}] \subset \mathcal{L}(V)$ 且 $\dim \mathcal{L}(V) = n^2$

$\therefore \dim F[\mathcal{A}] \le n^2$

因为 $F[\mathcal{A}]$是子空间，所以 $(F[\mathcal{A}], +, \mathcal{O})$是交换群

设 $\mathcal{S} = \sum_{i=0}^{k} f_i A^i, \qquad f_i \in F, k \in \mathbb{N}$

$\mathcal{T} = \sum_{j=0}^{l} g_j A^j, \qquad g_j \in F, l \in \mathbb{N}$

因为 $F[\mathcal{A}]$ 是线性空间，所以 $(F[\mathcal{A}], +, \mathcal{O})$ 是子群

$\mathcal{E} = \mathcal{A}^0 \in F[\mathcal{A}]$

$$\mathcal{S} \circ \mathcal{T} = \left(\sum_{i=0}^{k} f_i \mathcal{A}^i\right)\left(\sum_{j=0}^{l} g_j \mathcal{A}^j\right)$$

$$= \sum_{i=0}^{k} \sum_{j=0}^{l} (f_i \mathcal{A}^i) \circ (g_j \mathcal{A}^j) \qquad [\text{广义分配律}]$$

$$= \sum_{i=0}^{k} \sum_{j=0}^{l} f_i g_j \mathcal{A}^i \circ \mathcal{A}^j = \sum_{i=0}^{k} \sum_{j=0}^{l} f_i g_j \mathcal{A}^{i+j} \in F[\mathcal{A}] \qquad [\text{引理 } 2.1]$$

同理，$T \circ S = \sum_{i=0}^{k}\sum_{j=0}^{l} f_i g_j \mathcal{A}^{i+j}$

于是$\mathcal{T} \circ \mathcal{S} = \mathcal{S} \circ \mathcal{T}$ 且$\mathcal{S} \circ \mathcal{T} \in F[\mathcal{A}]$

$\mathcal{E} \in F[\mathcal{A}]$ 显然

于是$F[\mathcal{A}]$是$\mathcal{L}(V)$的交换子环

(ii)同理可证。 ■

注：由多项式赋值定理，存在唯一的环同态

$\varphi: F[t] \to F[\mathcal{A}]$ 满足$\varphi\big|_F = id$

且$\varphi(t) = \mathcal{A}$ 换言之

$$\varphi\left(\sum_{i=0}^{d} f_i t^i\right) = \sum_{i=0}^{d} f_i \mathcal{A}^i = f_d \mathcal{A}^d + \cdots + f_1 \mathcal{A} + f_0 \boldsymbol{\mathcal{E}}$$

特别有$\varphi(1) = \mathcal{E}$

$\psi: F[t] \to F[A]$类似

【例 2.4.1】多项式作用矩阵例

设$f = t^2 - 1,\qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$f(A) = A^2 - E = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^2 - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

注：设$\mathcal{S} = \sum_{i=0}^{k} f_i \mathcal{A}^i,\qquad f_i \in F, \mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$

$\mathcal{S} = \mathcal{O} \nRightarrow f_k = f_{k-1} = \cdots. = f_0 = 0$

【例 2.4.2】多项式作用矩阵例 1

$A = \mathcal{E},\qquad f = t - 1$

$f(A) = \mathcal{E} - \mathcal{E} = \mathcal{O}$

【定义 2.4.1】零化多项式

设 $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$, $\quad P \in F[t]$

如果 $P(\mathcal{A}) = 0$,则称 P 零化 $\mathcal{A}$ 或 P 是$\mathcal{A}$ 的一个零化多项式

当$P \neq 0$ 时，称 P 是 $\mathcal{A}$ 的非平凡的零化多项式

关于 $A \in M_n(F)$同样可以定义 A 的零化多项式

【例 2.4.3】求零化多项式例

设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

求 A, B, C 的非平凡的零化多项式

$A^0 = E, A^1 = E \Rightarrow A^1 - A^0 = O, \quad p(t) = t - 1$

$B^0 = E, B^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\therefore q(t) = t^2$

$C^0 = E, C^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, C^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E$

$\therefore r(t) = t^2 - 1$

$\dim F[\mathcal{A}] \leq n$

【定义 2.4.2】极小多项式

设 $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V), F[t]$ 中次数最低，首一的零化 $\mathcal{A}$ 的非平凡多项式

称为 $\mathcal{A}$ 的极小多项式，记为$\mu_{\mathcal{A}}$

设$A \in M_n(F), F[t]$中次数最低，首一的零化 A 的非平凡多项式

称为A的极小多项式，记为μ_A

【引理 2.2】极小多项式唯一存在性

(i)设 $\mathcal{A}=\mathcal{L}(V)$,则$\mathcal{A}$ 的极小多项式存在且唯一。

(ii)设 $A\in M_n(F)$,则 A 的极小多项式存在且唯一。

证：证明(ii), (i)类似

$\because \dim F[A]<\infty, \therefore \exists k\in\mathbb{N}$,使得 $A^0,\dots,A^k$ 线性相关

即$\exists\alpha_0,\alpha_1,\dots,\alpha_k\in F$ 不全为零，使得

$\alpha_0A^0+\alpha_1A^1+\cdots+\alpha_kA^k=O$

由k的极小性， $\alpha_k\neq 0$

于是 $A^k+\dfrac{\alpha_{k-1}}{\alpha_k}A^{k-1}+\cdots+\dfrac{\alpha_1}{\alpha_k}A+\dfrac{\alpha_0}{\alpha_k}E=O$

令$P(t)=\alpha_0+\alpha_1t+\cdots+\alpha_kt^k\in F[t]\setminus\{0\}$

满足 $P(A)=O$ 且首一

再由 k 的极小性可知,

不可能有 A 次数比 k 低的非平凡零化的多项式。 ■

注：唯一性证明

设 $q,\tilde{q}$ 为 A 的两个极小多项式，则由次数限制可知

$\deg q=\deg\tilde{q}$

又因为$q,\tilde{q}$ 都首一， 所以$\deg q-\tilde{q}<\deg q$

$\because q(A)-\tilde{q}(A)=(q-\tilde{q})(A)=O$

$\therefore q-\tilde{q}$ 零化 $A\Rightarrow q-\tilde{q}=O$ [因为次数限制]

【定理 2.2】极小多项式的性质

设$A \in M_n(F)$

(i)如果$P \in F[t]$ 零化A，则$\mu_A \mid P$

$(ii) \dim F[A] = \deg \mu_A$

$(iii)A$ 可逆 $\Leftrightarrow \mu_A(O) \neq O$

(iv) 如果$A \sim_s B$, 则$\mu_A = \mu_B$

注：定理 2.2 中$(i),(ii),(iii)$对线性算子也成立。

证：(i)设$P \in F[t]$ 使得 $P(A) = O$

由多项式除法，$P(t) = q(t)\mu_A(t) + r(t)$

其中$q, r \in F[t], \deg r < \deg \mu_A$

由多项式赋值定理

$O = P(A) = q(A)\mu_A(A) + r(A) = r(A)$

$\Rightarrow r(A) = O$

$\because \deg r < \deg \mu_A \quad \therefore r(t) = 0 \Rightarrow \mu_A \big| P$

(ii)设 $d = \deg {}^{\mu}A$,则$E, A, \dots, A^{d-1}$在F上线性无关，

$\big[$否则存在零化A 次数小于d的非零多项式.$\big]$

令 $S = f_0 A^0 + f_1 A + \cdots + f_k A^k \in F[A]$

令 $s = f_0 + f_1 t + \cdots + f_k t^k \in F[t]$

由多项式除法,

$s(t) = q(t)\mu_A(t) + r(t)$, 其中 $q, r \in F[t], \qquad \deg r < d$

$S = s(A) = q(A)\mu_A(A) + r(A) = r(A)$

令 $r = r_{d-1}t^{d-1} + r_{(d-2)}t^{d-2} + \cdots + r_0, \qquad r_i \in F$

$S = r(A) = r_{d-1}A^{d-1} + r_{d-2}A^{d-2} + \cdots + r_0 A^0 \in \langle A^0, A^1, \dots, A^{d-1} \rangle$

于是 $A^0, A^1, \dots, A^{d-1}$ 是$F[A]$的一组基

$\Rightarrow \dim F[A] = d$

(iii)设 $\mu_A(t)=t^d+\alpha_{d-1}t^{d-1}+\cdots+\alpha_1 t+\alpha_0,\qquad \alpha_i\in F$

$\mu_A(A)=A^d+\alpha_{d-1}A^{d-1}+\cdots+\alpha_1 A+\alpha_0 E=O$

$A^d+\alpha_{d-1}A^{d-1}+\cdots+\alpha_1 A=-\alpha_0 E$

$A(A^{d-1}+\alpha_{d-1}A^{d-2}+\cdots+\alpha_1 E)=-\alpha_0 E\quad [*]$

$\mu_A(O)\neq O\Rightarrow\alpha_0\neq 0\Rightarrow\alpha_0 E$ 可逆 $\overset{[*]}{\Rightarrow}A$满秩 $\Rightarrow A$可逆

反之，设 A 可逆，且 $\alpha_0=0$

则由$[*]$, $\qquad A(A^{d-1}+\alpha_{d-1}A^{d-2}+\cdots+\alpha_1 E)=O$

$A^{-1}\left(A(A^{d-1}+\alpha_{d-1}A^{d-2}+\cdots+\alpha_1 E)\right)=0$

$\Rightarrow A^{d-1}+\alpha_{d-1}A^{d-2}+\cdots+\alpha_1 E=O$

令 $p(t)=t^{\mathrm{d}-1}+\alpha_{d-1}t^{d-2}+\cdots+\alpha_1$

$p(A)=O$ 与 $\deg P\geq d$ 矛盾。

(iv) 设$B=P^{-1}AP$,其中 $P\in GL_n(F)$,

注意到 $B^i=\overbrace{(P^{-1}AP)(P^{-1}AP)\cdots(P^{-1}AP)}^{i\text{组}}$

$=P^{-1}A(PP^{-1})\mathrm{A}(PP^{-1})\cdots(PP^{-1})AP=P^{-1}A^iP$

$\mu_A(B)=(P^{-1}AP)^d+\alpha_{d-1}(P^{-1}AP)^{d-1}+\cdots+\alpha_1 P^{-1}AP+\alpha_0 E$

$=P^{-1}A^dP+\alpha_{d-1}P^{-1}A^{d-1}P+\cdots+\alpha_1 P^{-1}AP+\alpha_0 P^{-1}EP$

$=P^{-1}(A^d+\alpha_{d-1}A^{d-1}+\cdots+\alpha_1 A+E)P$

$=P^{-1}\mu_A(A)P=O$

由(i),$\mu_B\big|\mu_A$，同理 $\mu_A\big|\mu_B$ 由 μ_A,μ_B 都首一,得 $\mu_A=\mu_B$ ■

【例 2.4.4】简单矩阵的极小多项式

$\mu_O=t,\qquad \mu_E=t-1$

【例 2.4.5】幂等矩阵的极小多项式

设 $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$是幂等的，证明如果 $\mathcal{A} \neq 0$，$\mathcal{A} \neq E$

则$\mathcal{A}$的极小多项式是 $t^2 - t$

证：$\because \mathcal{A}^2 = \mathcal{A}, \quad \therefore \mathcal{A}^2 - \mathcal{A} = 0$

于是 $p(t) = t^2 - t$ 零化 $\mathcal{A}$

由定理 2.2$(i), \mu_{\mathcal{A}}$为 t 或 $t-1$ 或 $t(t-1)$

如果 $\mu_{\mathcal{A}}(t) = t, \mu_{\mathcal{A}}(\mathcal{A}) = \mathcal{A} = \mathcal{O}$

如果$\mu_{\mathcal{A}}(t) = t - 1, \mu_{\mathcal{A}}(\mathcal{A}) = \mathcal{A} - \mathcal{E} = \mathcal{O} \Rightarrow \mathcal{A} = \mathcal{E}$

则由假设 $\mu_{\mathcal{A}} = t^2 - t$ ■

【例 2.4.6】幂零算子的极小多项式

证明：如果 $\mathcal{A}$ 是幂零算子，则 $\mu_{\mathcal{A}} = t^k$,

其中k 是使得 $\mathcal{A}^k = \mathcal{O}$ 成立的最小正整数

证：由幂零的定义，$\exists m \in \mathbb{Z}^+, \mathcal{A}^m = \mathcal{O}$

于是 t^m零化 $\mathcal{A}$

由定理 2.2$(i), \mu_{\mathcal{A}}(t) = t^k, k \leq m, k \in \mathbb{Z}^+$

由$\mu_{\mathcal{A}}$次数的极小性，k 是使得$\mathcal{A}^k = \mathcal{O}$成立的最小正整数 ■

【例 2.4.7】极小多项式判断矩阵不相似

证明：$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{E} \nsim_s \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{A}$

证：$\mu_E = t - 1$

$A^0 = E, A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, A, E$ 线性无关

于是 $\deg \mu_A \geq 2 \Rightarrow \mu_E \neq \mu_A \Rightarrow E \nsim_s A$

由定理 2.2$(iv), E \nsim_s A$ ■

§3 不变子空间

§3.1 定义和性质

【定义 3.1.1】不变子空间

$\mathcal{A}\in\mathcal{L}(V)$,　　U 是 V 的子空间,　　如果 $\mathcal{A}(U)\subset U$

则称 U 是关于 $\mathcal{A}$ 的不变子空间,　　简称 $\mathcal{A}-$子空间

注：如果 U 是 $\mathcal{A}-$子空间，则 $\mathcal{A}\big|_U\in\mathcal{L}(U)$

【目的】

给定 $\mathcal{A}\in\mathcal{L}(V), V=U_1\oplus\ldots\oplus U_m$,　　U_i是 $\mathcal{A}-$子空间

令 $\mathcal{A}_i=\mathcal{A}\big|_{U_i}$,　　$i=1,\ldots,m$

先研究 $\mathcal{A}_i, i=1,\ldots,m$, 再拼出 $\mathcal{A}$

【例 3.1.1】平凡情形

平凡子空间 $\{\vec{0}\}, V$;

$\mathcal{A}(\{\vec{0}\})=\{\vec{0}\}$,　　$\mathcal{A}(V)=\operatorname{im}\mathcal{A}\subset V$

【例 3.1.2】核与像是不变子空间

$\ker\mathcal{A}, \operatorname{im}\mathcal{A}$ 是 $\mathcal{A}-$ 子空间

证：$\mathcal{A}(\ker\mathcal{A}) = \{\vec{0}\} \subset \ker(\mathcal{A})$

$\mathcal{A}(\operatorname{im}\mathcal{A}) = \mathcal{A}\big(\mathcal{A}(V)\big) \subset \operatorname{im}\mathcal{A}$

【引理 3.1】可交换复合的不变子空间

设 $\mathcal{A},\mathcal{B} \in \mathcal{L}(V)$ 且 $\mathcal{A}\circ\mathcal{B} = \mathcal{B}\circ\mathcal{A}$, 则

$\ker\mathcal{B}, \operatorname{im}\mathcal{B}$ 都是 $\mathcal{A}-$ 子空间。

证：设 $K_{\mathcal{B}} = \ker\mathcal{B}, I_{\mathcal{B}} = \operatorname{im}\mathcal{B}$

$\forall\vec{v} \in \ker\mathcal{B}$，$\mathcal{B}\circ\mathcal{A}(\vec{v}) = \mathcal{A}\circ\mathcal{B}(\vec{v}) = \mathcal{A}\big(\vec{0}\big) = \vec{0}$

$\Rightarrow \mathcal{A}(\vec{v}) \in K_{\mathcal{B}},\qquad$ 于是 $K_{\mathcal{B}}$是 $\mathcal{A}-$ 子空间

$\forall v \in I_{\mathcal{B}}$ 则 $\exists\vec{u} \in V, \vec{v} = \mathcal{B}(\vec{u})$

$\mathcal{A}(\vec{v}) = \mathcal{A}\big(\mathcal{B}(\vec{u})\big) = \mathcal{A}\circ\mathcal{B}(\vec{u})$

$= \mathcal{B}\circ\mathcal{A}(\vec{u}) = \mathcal{B}\big(\mathcal{A}(\vec{u})\big) \in I_{\mathcal{B}}$

$\therefore I_{\mathcal{B}}$是 $\mathcal{A}-$ 子空间 ■

【推论 3.1】多项式作用的核与像是不变子空间

设 $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V), \forall f \in F[t], \ker f(\mathcal{A})$ 和 $\operatorname{im} f(\mathcal{A})$ 都是 $\mathcal{A}-$ 子空间.

证: $\because \mathcal{A}\circ f(\mathcal{A}) = f(\mathcal{A})\circ A\quad \big[F[\mathcal{A}]$是交换环$\big]$

由引理 3.1, $\ker f(\mathcal{A})$ 和 $\operatorname{im} f(\mathcal{A})$ 是 $\mathcal{A}-$ 子空间 ■

【命题 3.1】不变子空间的和与交

设 $\mathcal{A}\in\mathcal{L}(V)$,

(i)设 U,W 是 $\mathcal{A}-$子空间，则 $U+W,U\cap W$ 都是 $\mathcal{A}-$子空间

证：设 $\vec{v}\in U\cap W,\vec{v}\in U\Rightarrow\mathcal{A}(\vec{v})\in U$

同理 $\mathcal{A}(\vec{v})\in W\Rightarrow\mathcal{A}(\vec{v})\in U\cap W$

$\Rightarrow U\cap W$ 是 $\mathcal{A}-$子空间

设 $\vec{v}\in U+W$, 则 $\exists\,\vec{u}\in U,\vec{w}\in W$, 使得 $\vec{v}=\vec{u}+\vec{w}$

$\mathcal{A}(\vec{v})=\mathcal{A}(\vec{u})+\mathcal{A}(\vec{w})\in U+W$

$\Rightarrow U+W$ 是 $\mathcal{A}-$子空间 ■

【例 3.1.3】求不变子空间例

设 $\mathcal{A}:F^2\to F^2,\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}\mapsto\begin{pmatrix}\alpha_1&0\\0&\alpha_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}$

求 $\mathcal{A}$ 的不变子空间

2 维：F^2, 0 维：$\{\vec{0}\}$

设 $\vec{v}\neq\vec{0}$ 且 $U=\langle\vec{v}\rangle$是一维 $\mathcal{A}-$子空间

$\mathcal{A}(\vec{v})=\lambda\vec{v},\quad \lambda\in F$

设 $\vec{v}=\begin{pmatrix}v_1\\v_2\end{pmatrix},\quad \mathcal{A}(\vec{v})=\lambda\vec{v}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}\alpha_1&0\\0&\alpha_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}v_1\\v_2\end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix}v_1\\v_2\end{pmatrix}$

$\begin{cases}(\alpha_1-\lambda)v_1=0\\(\alpha_2-\lambda)v_2=0\end{cases}$

情形 1：$\alpha_1\neq\alpha_2$

当 $\lambda=\alpha_1\Rightarrow v_2=0,\vec{v}$ 可取 $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$

当 $\lambda = \alpha_2 \Rightarrow v_1 = 0, \vec{v}$ 可取 $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

情形 2 $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha, \lambda = \alpha$

$\vec{v}$ 可为任何非零向量，即任何一维子空间都是 $\mathcal{A}-$子空间

§3.2 不变子空间下的矩阵表示

【定理 3.1】不变子空间的矩阵上三角分解

设 $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V), \dim V = n$

(i)设 U 是 d 维 $\mathcal{A}-$子空间，则 $\mathcal{A}$ 在 V 的某组基下的矩阵是

$M = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ O & A_{22} \end{pmatrix}_{n\times n}$，其中 $A_{11} \in M_d(F)$

(ii)设 $\mathcal{A}$ 在 V 的某组基下的矩阵是 M，则 $\mathcal{A}$ 必有 d 维 $\mathcal{A}-$子空间

证：(i)设 $\overrightarrow{e_1}, \dots, \overrightarrow{e_d}$ 是U的基，扩充为V的一组基 $\overrightarrow{e_1}, \dots, \overrightarrow{e_d}, \overrightarrow{e_{d+1}}, \dots, \overrightarrow{e_n}$

$\because \mathcal{A}\big|_U \in \mathcal{L}(U) \quad \therefore \left(\mathcal{A}(\overrightarrow{e_1}), \mathcal{A}(\overrightarrow{e_2}), \dots, \mathcal{A}(\overrightarrow{e_d})\right) = (\overrightarrow{e_1}, \dots, \overrightarrow{e_d})A_{11}$

其中 A_{11} 是 $M_d(F)$中某个矩阵。

$$\left(\mathcal{A}(\overrightarrow{e_1}), \mathcal{A}(\overrightarrow{e_2}), \dots, \mathcal{A}(\overrightarrow{e_d})\right) = (\overrightarrow{e_1}, \dots, \overrightarrow{e_d}, \overrightarrow{e_{d+1}}, \dots, \overrightarrow{e_n})\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ O & A_{22} \end{pmatrix}$$

其中 $A_{12} \in F^{d\times(n-d)}, A_{22} \in F^{(n-d)\times(n-d)}$

(ii)设 $\mathcal{A}$ 在基底 $\overrightarrow{\varepsilon_1}, \dots, \overrightarrow{\varepsilon_n}$ 下的矩阵为 M，即

$$\left(\mathcal{A}(\overrightarrow{\varepsilon_1}), \dots \mathcal{A}(\overrightarrow{\varepsilon_d}), \mathcal{A}(\overrightarrow{\varepsilon_{d+1}}), \dots, \mathcal{A}(\overrightarrow{\varepsilon_n})\right)$$
$$= (\overrightarrow{\varepsilon_1}, \dots, \overrightarrow{\varepsilon_d}, \overrightarrow{\varepsilon_{d+1}}, \dots, \overrightarrow{\varepsilon_n})\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ O & A_{22} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \mathcal{A}(\overrightarrow{\varepsilon_1}, \dots, \overrightarrow{\varepsilon_d}) = (\overrightarrow{\varepsilon_1}, \dots, \overrightarrow{\varepsilon_d}, \overrightarrow{\varepsilon_{d+1}}, \dots, \overrightarrow{\varepsilon_n})\begin{pmatrix} A_{11} \\ O \end{pmatrix} = (\overrightarrow{\varepsilon_1}, \dots, \overrightarrow{\varepsilon_d})A_{11}$$

$$\Rightarrow \mathcal{A}(\langle \overrightarrow{\varepsilon_1}, \dots, \overrightarrow{\varepsilon_d} \rangle) \subset \langle \overrightarrow{\varepsilon_1}, \dots, \overrightarrow{\varepsilon_d} \rangle$$

即 $\langle \overrightarrow{\varepsilon_1}, \dots, \overrightarrow{\varepsilon_d} \rangle$ 是 d 维 $\mathcal{A}-$子空间 ■

【定理 3.2】不变子空间对角分解

设 $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V), \dim V = n$

(i)如果 $U_1, \dots, U_m$ 是 $\mathcal{A}-$ 子空间 且 $U = U_1 \oplus \cdots \oplus U_m$

则 $\mathcal{A}$ 在 V 的某组基下的矩阵是

$M = \mathrm{diag}(A_1, \dots, A_m)$

其中 $A_i \in M_{d_i}(F), d_i = \dim U_i, \quad i = 1, \dots, m$

(ii)如果 $\mathcal{A}$ 在 V 的某组基下的矩阵是 M，则

存在 $\mathcal{A}-$ 子空间 $U_1, \dots, U_m$,

使得 $V = U_1 \oplus \dots \oplus U_m$

且 $\dim U_i = d_i, \quad i = 1, \dots, m$

证：(i)设 $\mathcal{A}_i = \mathcal{A}\big|_{U_i}, \quad i = 1, \dots, m$

则 $\mathcal{A}_i \in \mathcal{L}(U_i)$

设 $\overrightarrow{e_{\imath 1}}, \dots., \overrightarrow{e_{\imath d}}$ 是 U_i 的一组基，$\mathcal{A}_i$ 在该基下的矩阵是 $A_i \in M_{d_i}(F)$

$\because V = U_1 \oplus \cdots U_m$

$\therefore \overrightarrow{e_{11}}, \dots, \overrightarrow{e_{1d_1}}, \dots, \overrightarrow{e_{m1}}, \dots, \overrightarrow{e_{md_m}}$ 是 V 的一组基

$\mathcal{A}$ 在该基下的矩阵

$$\left(\mathcal{A}(\overrightarrow{e_{11}}), \dots, \mathcal{A}\left(\overrightarrow{e_{1d_1}}\right), \dots, \mathcal{A}(\overrightarrow{e_{m1}}), \dots, \mathcal{A}\left(\overrightarrow{e_{md_m}}\right)\right)$$

$$= \left(\overrightarrow{e_{11}}, \dots, \overrightarrow{e_{1d_1}}, \dots, \overrightarrow{e_{m1}}, \dots, \overrightarrow{e_{md_m}}\right)\begin{pmatrix} A_1 & & O \\ & \ddots & \\ O & & A_m \end{pmatrix} \ [*]$$

(ii)设 $\left(\overrightarrow{\varepsilon_{11}}, \dots, \overrightarrow{\varepsilon_{1d_1}}, \dots, \overrightarrow{\varepsilon_{m1}}, \dots, \overrightarrow{\varepsilon_{md_m}}\right)$ 是 V 的一组基，

且在该基下 $\mathcal{A}$ 的矩阵为 M

令 $U_i = \langle \overrightarrow{\varepsilon_{\iota 1}}, \dots, \overrightarrow{\varepsilon_{\iota d_\iota}} \rangle, \qquad i = 1, \dots, m$

则 $V = U_1 \oplus \cdots \oplus U_m$

$\Rightarrow \dim U_1 + \cdots + \dim U_m = d_1 + \cdots + d_m = n$

$\left[\text{第一章命题 } 4.2\right]$

由 $[*]$可知

$\left(\mathcal{A}(\overrightarrow{\varepsilon_{\iota 1}}), \dots, \mathcal{A}\left(\overrightarrow{\varepsilon_{\iota d_\iota}}\right)\right) = \left(\overrightarrow{\varepsilon_{\iota 1}}, \dots, \overrightarrow{\varepsilon_{\iota d_\iota}}\right) A_i, \qquad i = 1, \dots, m$

$\Rightarrow U_i$ 是 $\mathcal{A} -$ 子空间 $\blacksquare$

§3.3 $\mathcal{A}-$子空间与极小多项式

【引理 3.2】算子和矩阵的零化多项式

设 $\mathcal{A}\in\mathcal{L}(V),A\in M_n(F)$ 是 $\mathcal{A}$ 的某个矩阵，则

$(i)\forall p\in F[t],\quad p$ 零化 $\mathcal{A}\Leftrightarrow p$ 零化 A

$(ii)\mu_A=\mu_{\mathcal{A}}$

证：由定理 2.1

$\Phi:\mathcal{L}(V)\to M_n(F),\quad \mathcal{A}\mapsto A$ 是代数同构

设 $\overline{\Psi}=\Phi\big|_{F[\mathcal{A}]},\overline{\Psi}:F[\mathcal{A}]\to F[A],\quad \mathcal{A}\mapsto A$ 也是代数同构

且 $\overline{\Psi}\big|_F=id,\overline{\Psi}(\alpha\mathcal{E})=\alpha E$

$\Rightarrow\forall p\in F[t],p[\mathcal{A}]=\mathcal{O}\Leftrightarrow\overline{\Psi}\big(p(\mathcal{A})\big)=0\Leftrightarrow p(A)=0\quad(i)$成立

$(ii)\mu_{\mathcal{A}}(\mathcal{A})=\mathcal{O}\overset{[i]}{\Rightarrow}\mu_{\mathcal{A}}(A)=0\Rightarrow\mu_A\big|\mu_{\mathcal{A}}$

同理$\mu_{\mathcal{A}}\big|\mu_A$

$\Rightarrow\mu_A=\mu_{\mathcal{A}}\quad\blacksquare$

【命题 3.2】对角矩阵的极小多项式

设 $A\in M_n(F)$

(i)如果 $A=\begin{pmatrix}B&C\\O&D\end{pmatrix}$, 则 $\mu_B\big|\mu_A$, $\mu_D\big|\mu_A$

(ii)如果 $A=\begin{pmatrix}A_1&&0\\&\ddots&\\0&&A_m\end{pmatrix}$, 则 $\mu_A=\operatorname{lcm}\big(\mu_{A_1},\dots.,\mu_{A_m}\big)$

证：(i)设 $B\in M_d(F)$, 则 $D\in M_{n-d}(F)$

断言 $A^k=\begin{pmatrix} B^k & C_k \\ O & D^k \end{pmatrix}, C_k\in F^{d\times(n-d)}$

断言的证明：对k 归纳， $k=0$ 时成立

设 $A^{k-1}=\begin{pmatrix} B^{k-1} & C_{k-1} \\ O & D^{k-1} \end{pmatrix}$

则 $A^k=\begin{pmatrix} B^{k-1} & C_{k-1} \\ O & D^{k-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} B & C \\ O & D \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} B^k & C_k \\ O & D^k \end{pmatrix}$

于是断言成立

设 $\mu_A(t)=t^m+\alpha_{m-1}t^{m-1}+\cdots+\alpha_0$

$\mu_A(A)=O$

$=A^m+\alpha_{m-1}A^{m-1}+\cdots+\alpha_0E$

$=\begin{pmatrix} B^m & C_m \\ O & D^m \end{pmatrix}+\alpha_{m-1}\begin{pmatrix} B^{m-1} & C_{m-1} \\ O & D^{m-1} \end{pmatrix}+\cdots+\alpha_0\begin{pmatrix} B^0 & C_0 \\ O & D^0 \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} B^m+\alpha_{m-1}B^{m-1}+\cdots+\alpha_0E_d & * \\ O & D^m+\alpha_{m-1}D^{m-1}+\cdots+\alpha_0E_{n-d} \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} \mu_A(B) & * \\ O & \mu_A(D) \end{pmatrix}$

[$*$ 代表某个 $d\times(n-d)$ 矩阵]

$\Rightarrow \mu_A(B)=0$ 且 $\mu_A(D)=0$

$\Rightarrow \mu_B\,\big|\,\mu_A$ 且 $\mu_D\,\big|\,\mu_A$ $\big[$定理 $2.2(i)\big]$

(ii)由(i)可知 $\mu_{\mathcal{A}_i}\,\big|\,\mu_A, i=1,\dots,m$

于是μ_A 是$\mu_{A_1},\dots,\mu_{A_m}$ 的公倍式

设 $l=\operatorname{lcm}(\mu_{A_1},\dots,\mu_{A_m})$ $\big[$首一$\big]$, 则 $l=q_i\mu_{A_i}$, $i=1,\dots,m$

$l(A)=\begin{pmatrix} l(A_1) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & l(A_m) \end{pmatrix}$ [见(i)的断言]

$l(A_i)=\left(q_i\mu_{A_i}\right)(A_i)=q_i(A_i)\mu_{A_i}(A_i)=O$

于是 $l(A_i)=O,\qquad i=1,\dots,m$

$\Rightarrow l(A)=O\Rightarrow \mu_A\,\middle|\,l$ [定理 2.2(i)]

$\Rightarrow \mu_A=l\qquad\blacksquare$

【命题 3.3】命题 3.2 的线性算子版

设 $\mathcal{A}\in\mathcal{L}(V)$

(i)如果 U 是 $\mathcal{A}-$子空间,$\mathcal{B}=\mathcal{A}\big|_U$ 则 $\mu_{\mathcal{B}}\,\big|\,\mu_{\mathcal{A}}$

(ii)设 $U_1,\dots,U_m$ 是 $\mathcal{A}-$子空间, 且 $V=U_1\oplus\cdots\oplus U_m$

令 $\mathcal{A}_i=\mathcal{A}\big|_{U_i}, i=1,\dots,m,$ 则 $\mu_{\mathcal{A}}=\operatorname{lcm}\left(\mu_{\mathcal{A}_1},\dots,\mu_{\mathcal{A}_m}\right)$

证:(i) 设 $\overrightarrow{e_1},\dots,\overrightarrow{e_d}$ 是 U 的一组基,$\mathcal{B}$ 在该基下的矩阵是 $B\in M_n(F)$

由定理 3.1 及其证明,

$\mathcal{A}$在扩充基 $\overrightarrow{e_1},\dots,\overrightarrow{e_d},\overrightarrow{e_{d+1}},\dots,\overrightarrow{e_n}$下的矩阵是$\begin{pmatrix}B & C\\ O & D\end{pmatrix}$

由命题 3.2(i),$\mu_B\,\big|\,\mu_A,\qquad$ 由引理 3.2,$\mu_{\mathcal{B}}\,\big|\,\mu_{\mathcal{A}}$

(ii)设 $\mu_{\mathcal{A}_i}$ 在 U_i 的某组基下的矩阵为 A_i

由定理 3.2 及其证明,$\mathcal{A}$ 在 V 的某组基下的矩阵为

$A=\begin{pmatrix}A_1 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & A_m\end{pmatrix}$, 其中 A_i 是 $\mathcal{A}_i$ 的某个矩阵

由引理 3.2,$\qquad \mu_{\mathcal{A}_i}=\mu_{A_i},\qquad i=1,\dots,m$

于是由命题 3.2,$\mu_{\mathcal{A}}=\operatorname{lcm}\left(\mu_{\mathcal{A}_1},\dots,\mu_{\mathcal{A}_m}\right)\qquad\blacksquare$

§4 特征子空间

§4.1 特征向量

【定义 4.1.1】特征向量

设 $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V), \vec{v} \in V \setminus \{\vec{0}\}$.

如果 $\vec{v}$ 与 $\mathcal{A}(\vec{v})$ 线性相关，则称 $\vec{v}$ 是 $\mathcal{A}$ 的特征向量 ($eigenvector$)

【引理 4.1】特征向量的判定和性质

设 $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V), \vec{v} \in V \setminus \{\vec{0}\}$

$\vec{v}$ 是 $\mathcal{A}$ 的特征向量 $\Leftrightarrow \exists \lambda \in F$, 使得 $\mathcal{A}(\vec{v}) = \lambda\vec{v}$

证：$\Rightarrow$: 设 $\vec{v}$ 是 $\mathcal{A}$ 的特征向量，

则 $\exists \alpha_1, \alpha_2$ 不全为零，使得 $\alpha_1\vec{v} + \alpha_2\mathcal{A}(\vec{v}) = \vec{0}$

$\because v \neq \vec{0} \quad \therefore \alpha_2 \neq 0 \quad \mathcal{A}(\vec{v}) = -\dfrac{\alpha_1}{\alpha_2}\vec{v}$

令 $\lambda = -\dfrac{\alpha_1}{\alpha_2}$ 即可

$\Leftarrow$: 显然 ■

【命题 4.1】特征向量生成不变子空间

设 $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V), \vec{v} \in V$,

$\vec{v}$ 是 $\mathcal{A}$ 的特征向量 $\Leftrightarrow \langle\vec{v}\rangle$ 是 $\mathcal{A}$ 的一维不变子空间

证：$\Rightarrow$: 由引理 4.1, $\exists \lambda \in F$, 使得 $\mathcal{A}(\vec{v}) = \lambda\vec{v}$.

$\forall \vec{u} \in \langle\vec{v}\rangle, \exists \alpha \in F$, 使得 $\vec{u} = \alpha\vec{v}$

$\mathcal{A}(\vec{u}) = \mathcal{A}(\alpha\vec{v}) = \alpha\mathcal{A}(\vec{v}) = \alpha\lambda\vec{v} \in \langle\vec{v}\rangle$

$\Rightarrow \langle \vec{v} \rangle$ 是$\mathcal{A}-$子空间

$\because \vec{v} \neq \vec{0} \quad \therefore \dim\langle \vec{v} \rangle = 1$

$\Leftarrow$: 设 $\langle \vec{v} \rangle$是一维 $\mathcal{A}-$子空间,

则 $\vec{v} \neq \vec{0}, \mathcal{A}(\vec{v}) \in \langle \vec{v} \rangle$

即 $\exists \lambda \in F$, 使得 $\mathcal{A}(\vec{v}) = \lambda \vec{v}$

由引理 4.1, $\vec{v}$ 是 $\mathcal{A}$ 的特征向量 ■

§4.2 特征向量的计算

【方法】计算所有特征向量

设 $\mathcal{A}\in\mathcal{L}(V)$, 在 V 的基底 $\overrightarrow{e_1},\dots,\overrightarrow{e_n}$ 下的矩阵是 $A\in M_n(F)$

设 $\vec{v}=v_1\overrightarrow{e_1}+\cdots+v_n\overrightarrow{e_n}\neq\vec{0}$

$\vec{v}$ 是 $\mathcal{A}$ 的特征向量 $\Leftrightarrow\exists\lambda\in F,\mathcal{A}(\vec{v})=\lambda\vec{v}$ $\left[\text{引理 }4.1\right]$

$$\Leftrightarrow\exists\lambda\in F,\qquad A\begin{pmatrix}v_1\\ \vdots\\ v_n\end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix}v_1\\ \vdots\\ v_n\end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow\exists\lambda\in F,\qquad(\lambda E-A)\begin{pmatrix}v_1\\ \vdots\\ v_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}\qquad[*]$$

$[*]$有非平凡解 $\Leftrightarrow|\lambda E-A|=0$

① 求 $\lambda\in F$, 使得$|\lambda E-A|=0$ $[**]$

② 对满足$[**]$的每个λ, 求$[*]$的解空间 V^{λ}

③ 所有V^{λ}中的非零向量即为 $\mathcal{A}$ 的特征向量

【定义 4.2.1】特征多项式

设 $A\in M_n(F)$, t 是未定元,

多项式 $|tE-A|\in F[t]$称为 A 的特征多项式, 记为 $\mathcal{X}_A(t)$

($character\ polynomial$)

$\mathcal{X}_A(t)$在 F 中的根称为 A 的特征根(值)

($eigenroots, eigenvalues$)

【例 4.2.1】特征多项式的简单性质

设 $A=\left(a_{ij}\right)_{n\times n}$

$$\mathcal{X}_A(t)=|tE-A|=\begin{vmatrix} t-a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & t-a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & t-a_{nn} \end{vmatrix}$$

$\mathcal{X}_A(t)$是 n 次多项式且首一

$\mathcal{X}_A(0)=|-A|=(-1)^n|A|$

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix} \lambda-a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & \lambda-a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & \lambda-a_{nn} \end{vmatrix}$$

$\Rightarrow |\lambda E-A|=\mathcal{X}_A(\lambda)$

$\Rightarrow |\lambda E-A|=0 \Leftrightarrow \lambda$ 是 $\mathcal{X}_A(t)$的根，即特征值

【命题 4.2】特征多项式相似不变性

设 $A\in M_n(F)$, 则 $\mathcal{X}_A$是相似不变量

证：设 $B\in M_n(F)$且 $B\sim_s A$,

则$\exists P\in GL_n(F)$使得 $B=P^{-1}AP$

$\mathcal{X}_B(t)=|tE-B|=|tE-P^{-1}AP|=|tP^{-1}EP-P^{-1}AP|$

$=|P^{-1}(tE-A)P|=|P^{-1}||tE-A||P|=|tE-A|=\mathcal{X}_A(t)$

注：设$\mathcal{A}\in\mathcal{L}(V), A, B\in M_n(F)$是 $\mathcal{A}$ 在 V 的两组不同基下的矩阵

则 $A\sim_s B\Rightarrow \mathcal{X}_A=\mathcal{X}_B$ ∎

【定义 4.2.2】线性算子的特征多项式

设 $\mathcal{A}\in\mathcal{L}(V)$, A 是 $\mathcal{A}$ 的某个矩阵

则 $\mathcal{X}_A(t)$也称为 $\mathcal{A}$ 的特征多项式，记为 $\mathcal{X}_{\mathcal{A}}(t)$ [特征根同理]

注：$\deg \mathcal{X}_A=n$, 且首一

注：设$A\in M_n(F)$, 则 A 可以看成线性算子

$$\mathcal{A}: F^n \to F^n, \qquad \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mapsto A\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

从而 A 也有特征向量的概念.

【例 4.2.1】二维求特征根和特征向量例

$\mathcal{A}: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}$ 为 $\mathbb{R}^2$ 的一组基

满足 $\mathcal{A}(\overrightarrow{e_1}) = \overrightarrow{e_1} + \overrightarrow{e_2}, \mathcal{A}(\overrightarrow{e_2}) = \overrightarrow{e_1} - \overrightarrow{e_2}, \mathcal{A} \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$

求 $\mathcal{A}$ 的所有特征根和特征向量

解：$\left(\mathcal{A}(\overrightarrow{e_1}), \mathcal{A}(\overrightarrow{e_2})\right) = (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}}_{A}$

$$\mathcal{X}_{\mathcal{A}}(t) = |tE - A| = \begin{vmatrix} t-1 & -1 \\ t+1 & t+1 \end{vmatrix} = (t-1)(t+1) - 1 = t^2 - 2$$

特征值 $\lambda_1 = \sqrt{2}, \lambda_2 = -\sqrt{2}$

$$\lambda_1 = \sqrt{2} \Rightarrow \begin{pmatrix} \sqrt{2}-1 & -1 \\ -1 & \sqrt{2}+1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

[因为矩阵行列式为零，两行线性相关，所以只要解一个就行]

$$\left(\sqrt{2}-1\right)x_1 - x_2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \alpha \\ x_2 = \alpha\left(\sqrt{2}-1\right) \end{cases}, \alpha \in F$$

λ_1 对应的特征向量为 $\alpha\left(\overrightarrow{e_1} + \left(\sqrt{2}-1\right)\overrightarrow{e_2}\right), \alpha \neq 0$

类似地, λ_2对应的特征向量为 $\alpha\left(\overrightarrow{e_1} - \left(\sqrt{2}-1\right)\overrightarrow{e_2}\right), \alpha \neq 0$

【例 4.2.2】三维求特征根和特征向量例

$\mathcal{A} \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^3), \qquad \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}$ 是 $\mathbb{C}^3$ 的一组基

$\mathcal{A}(\overrightarrow{e_1}) = \overrightarrow{e_1}, \mathcal{A}(\overrightarrow{e_2}) = \overrightarrow{e_2}, \mathcal{A}(\overrightarrow{e_3}) = \overrightarrow{e_2} + \overrightarrow{e_3}$

求 $\mathcal{A}$ 的特征根和特征向量

解：$\left(\mathcal{A}(\overrightarrow{e_1}),\mathcal{A}(\overrightarrow{e_2}),\mathcal{A}(\overrightarrow{e_3})\right)=(\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2},\overrightarrow{e_3})\underbrace{\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}}_{A}$

$\mathcal{X}_{\mathcal{A}}(t)=\det\begin{pmatrix}t-1&0&0\\0&t-1&-1\\0&0&t-1\end{pmatrix}=(t-1)^3$

特征根 $\lambda=1$

$(\lambda E-A)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&-1\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$

解为 $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\0\end{pmatrix},x_1,x_2\in F$

特征向量为 $\alpha_1\overrightarrow{e_1}+\alpha_2\overrightarrow{e_2},\alpha_1,\alpha_2\in F$ 不全为零

§4.3 特征子空间

【定义 4.3.1】关于特征根的特征子空间

设 $\mathcal{A}\in\mathcal{L}(V),\lambda$ 是 $\mathcal{A}$ 在 F 中的特征根

$V^{\lambda}\coloneqq\{\vec{v}\in V|\mathcal{A}(\vec{v})=\lambda(\vec{v})\}$

称 V^{λ}是 $\mathcal{A}$ 关于 λ 的特征子空间

【命题 4.3】特征子空间是不变的

设 λ 是线性算子 $\mathcal{A}$ 在 F 中的特征值

则V^{λ} 是 $\mathcal{A}-$ 子空间

证：验证 V^{λ} 是子空间

设 $\alpha_1,\alpha_2\in F,\overrightarrow{v_1},\overrightarrow{v_2}\in V^{\lambda}$

$\mathcal{A}(\alpha_1\overrightarrow{v_1}+\alpha_2\overrightarrow{v_2})=\alpha_1\mathcal{A}(\overrightarrow{v_1})+\alpha_2\mathcal{A}(\overrightarrow{v_2})=\alpha_1\lambda\overrightarrow{v_1}+\alpha_2\lambda\overrightarrow{v_2}$

$=\lambda(\alpha_1\overrightarrow{v_1}+\alpha_2\overrightarrow{v_2})\Rightarrow\alpha_1\overrightarrow{v_1}+\alpha_2\overrightarrow{v_2}\in V^{\lambda}\Rightarrow V^{\lambda}$是子空间

验证:V^{λ}是 $\mathcal{A}-$ 不变的

设 $\vec{v}\in V^{\lambda},\mathcal{A}(\vec{v})=\lambda\vec{v}\in V^{\lambda}\Rightarrow V^{\lambda}$是 $\mathcal{A}-$ 不变的 ■

【定理 4.1】特征子空间交零

设 $\mathcal{A}\in\mathcal{L}(V),\lambda_1,\ldots,\lambda_m\in F$ 是 $\mathcal{A}$ 的若干个互不相同的特征根,

则$V^{\lambda_1}+\cdots+V^{\lambda_m}$是直和

证：对 m 归纳,$m=1$ 时定理成立

设 $m-1$ 时定理成立

于是 $V^{\lambda_1}+\cdots+V^{\lambda_{m-1}}$ 是直和

设 $\overrightarrow{v_1}\in V^{\lambda_1},\ldots,\overrightarrow{v_{m-1}}\in V^{\lambda_{m-1}},\overrightarrow{v_m}\in V^{\lambda_m}$

使得 $\overrightarrow{v_1}+\cdots+\overrightarrow{v_{m-1}}+\overrightarrow{v_m}=\vec{0}$ [①]

$\mathcal{A}$ 作用于①可得

$\mathcal{A}(\overrightarrow{v_1})+\cdots+\mathcal{A}(\overrightarrow{v_{m-1}})+\mathcal{A}(\overrightarrow{v_m})=\mathcal{A}(\vec{0})$

即 $\lambda_1\overrightarrow{v_1}+\cdots+\lambda_{m-1}\overrightarrow{v_{m-1}}+\lambda_m\overrightarrow{v_m}=\vec{0}$ [②]

$(\lambda_m\times①-②)$得

$(\lambda_m-\lambda_1)\overrightarrow{v_1}+\cdots+(\lambda_m-\lambda_{m-1})\overrightarrow{v_{m-1}}=\vec{0}$

由归纳假设及第一章命题 4.1

$(\lambda_m-\lambda_1)\overrightarrow{v_1}=\cdots=(\lambda_m-\lambda_{m-1})\overrightarrow{v_{m-1}}=\vec{0}$

$\because \lambda_m-\lambda_i\neq 0,\quad i=1,\dots,m-1$

$\therefore \overrightarrow{v_1}=\cdots=\overrightarrow{v_{m-1}}=\vec{0}$

再由 ①，$\overrightarrow{v_m}=\vec{0}$

由第一章命题 4.1， $V^{\lambda_1}+\cdots+V^{\lambda_{m-1}}$ 是直和

【定义 4.3.2】几何重数 代数重数

设 $\mathcal{A}\in\mathcal{L}(V),\lambda\in F$ 是 $\mathcal{A}$ 的特征根

$\dim V^{\lambda}$ 称为 λ 的几何重数

因子 $(t-\lambda)$在 $\mathcal{X}_{\mathcal{A}}(t)$中的重数称为 λ 的代数重数

【命题 4.4】几何重数不超过代数重数

设 $\mathcal{A}\in\mathcal{L}(V),\lambda\in F$是 $\mathcal{A}$ 的特征值

则 λ 的几何重数 $\leq\lambda$ 的代数重数

证：设 $d=\dim V^{\lambda},\overrightarrow{e_1},\dots,\overrightarrow{e_d}$是 V^{λ}的一组基

把它扩充为 V 的一组基 $\overrightarrow{e_1},\dots\overrightarrow{e_d},\overrightarrow{e_{d+1}},\dots,\overrightarrow{e_n}$

$\mathcal{A}(\overrightarrow{e_i})=\lambda\overrightarrow{e_i},\quad i=1,\dots,d$

$\Rightarrow \left(\mathcal{A}(\overrightarrow{e_1}), \dots, \mathcal{A}(\overrightarrow{e_d}), \mathcal{A}(\overrightarrow{e_{d+1}}), \dots, \mathcal{A}(\overrightarrow{e_n})\right)$

$= (\overrightarrow{e_1}, \dots., \overrightarrow{e_d}, \overrightarrow{e_{d+1}}, \dots, \overrightarrow{e_n}) \underbrace{\begin{pmatrix} \lambda E_d & B \\ O & C \end{pmatrix}}_{A}$

$\mathcal{X}_{\mathcal{A}}(t) = |tE_n - A| = \left| t\begin{pmatrix} E_d & O \\ O & E_{n-d} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda E_d & B \\ O & C \end{pmatrix} \right|$

$= \begin{vmatrix} tE_d - \lambda E_d & -B \\ O & tE_{n-d} - C \end{vmatrix} = (t-\lambda)^d |tE_{n-d} - C|$

$\Rightarrow d \leq \lambda$ 的代数重数 ■

【例 4.3.1】几何与代数重数例

在 § 4.2 节的两个例子中，

$\lambda_1 = \sqrt{2}, \qquad V^{\lambda_1} = \langle \overrightarrow{e_1} + (\sqrt{2} - 1)\overrightarrow{e_2} \rangle$

$\lambda_2 = -\sqrt{2}, \qquad V^{\lambda_2} = \langle \overrightarrow{e_1} - (\sqrt{2} - 1)\overrightarrow{e_2} \rangle$

λ_1, λ_2 的几何和代数重数都是 1

$V^{\lambda_1} + V^{\lambda_2} = V^{\lambda_1} \bigoplus V^{\lambda_2} = \mathbb{R}^2$

$\lambda = 1, V^{\lambda} = \langle \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2} \rangle$

$V^{\lambda} \subset \mathbb{C}^3, V^{\lambda} \neq \mathbb{C}^3$

λ的几何重数是 2，代数重数是 3

§4.4 特征多项式中的相似不变量

【命题 4.5】特征多项式的相似不变量

设 $A, B \in M_n(F), A \sim_s B \Rightarrow \mathcal{X}_A(t) = \mathcal{X}_B(t)$ [命题 4.2]

A 的特征根是相似不变量

$\mathcal{X}_A(t)$的系数是相似不变量

$$\text{设} A = \left(a_{ij}\right)_{n\times n}, \qquad \mathcal{X}_A(t) = \begin{vmatrix} t-a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & t-a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & t-a_{nn} \end{vmatrix}$$

$\mathcal{X}_{\mathcal{A}}(t) = t^n + \alpha_{n-1}t^{n-1} + \cdots + \alpha_1 t + \alpha_0 \,, \alpha_i \in F$

$\alpha_{n-1} = -\operatorname{tr} A$

α_{n-2} 是所有二阶主子式之和

$\alpha_{n-i} = (-1)^i \times$ 所有 i 阶主子式之和

$\alpha_0 = (-1)^n \det A$

于是 A 的各阶主子式之和也是相似不变量.

特别地, A 可逆 $\Leftrightarrow \mathcal{X}_A(0) \neq 0$, 即 0 不是 A 的特征根

【例 4.4.1】秩 1 矩阵的特征值

设 $A = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, $\alpha_i \in F$, 求 A 的特征值

解：$\because \operatorname{rank} A \leq 1 \;\therefore$ 当 $k > 2$ 时，A的所有主子式都为零

于是 $\mathcal{X}_A = t^n - (\operatorname{tr} A)t^{n-1}$

A 有两个特征根 0 和 $\operatorname{tr} A$

其中 $\operatorname{tr} A = \alpha_1^2 + \cdots + \alpha_n^2$

§5 特征子空间的应用

§5.1 线性算子和矩阵的对角化

【定义 5.1.1】谱

设 $\mathcal{A}\in\mathcal{L}(V)$，$\mathcal{A}$ 在 F 中互不相同的特征根的集合

称为 $\mathcal{A}$ 在 F 上的谱(spectrum)，记为 $\operatorname{spec}_F(\mathcal{A})$

类似地可定义 $\operatorname{spec}_F A$，其中 $A\in M_n(F)$

【例 5.1.1】不同基域下的谱

设 $A=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&-1&0\end{pmatrix}\in M_4(\mathbb{Q})\subset M_4(\mathbb{R})$

$\mathcal{X}_A(t)=|tE-A|=\begin{vmatrix}t&-1&0&0\\0&t&-1&0\\0&0&t&-1\\0&0&1&t\end{vmatrix}=t^2(t^2+1)$

$\operatorname{spec}_{\mathbb{Q}} A=\{0\}$，$\operatorname{spec}_{\mathbb{R}} A=\{0\}$，$\operatorname{spec}_{\mathbb{C}} A=\left\{0, \sqrt{-1}, -\sqrt{-1}\right\}$

【定义 5.1.2】可对角化

设 $\mathcal{A}\in\mathcal{L}(V)$，如果 $\mathcal{A}$ 在 V 的某组基下的矩阵是对角矩阵

则称 $\mathcal{A}$ 是可对角化的

设 $A\in M_n(F)$，如果 A 相似于某个 F 上的对角矩阵

则称 A 在 F 上是可对角化的

注：A 在 F 上可对角化 $\Leftrightarrow \exists P\in GL_n(F)$,对角的$D\in M_n(F)$

使得 $A=P^{-1}DP$

【定理 5.1】可对角化的判定

设 $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$，则下列断言等价

(i) $\mathcal{A}$ 可对角化

(ii) $\mathcal{A}$ 有 n 个线性无关的特征向量 $[n = dim\, V]$

(iii) $V = \bigoplus\limits_{\lambda \in \operatorname{spec} \mathcal{A}} V^{\lambda}$

证：$(i) \Rightarrow (ii)$：

设 $\mathcal{A}$ 在 V 的基底 $\overrightarrow{\varepsilon_1}, \dots, \overrightarrow{\varepsilon_n}$ 下的矩阵是$\begin{pmatrix} \alpha_1 & & O \\ & \ddots & \\ O & & \alpha_n \end{pmatrix}$

则$\big(\mathcal{A}(\overrightarrow{\varepsilon_1}), \dots, \mathcal{A}(\overrightarrow{\varepsilon_n})\big) = (\overrightarrow{\varepsilon_1}, \dots, \overrightarrow{\varepsilon_n})\begin{pmatrix} \alpha_1 & & O \\ & \ddots & \\ O & & \alpha_n \end{pmatrix}$

$\mathcal{A}\big(\overrightarrow{\varepsilon_j}\big) = \alpha_i \overrightarrow{\varepsilon_j}, \quad j = 1, \dots, n$

于是 $\overrightarrow{\varepsilon_1}, \dots, \overrightarrow{\varepsilon_n}$ 是 $\mathcal{A}$ 的特征向量

$(ii) \Rightarrow (iii)$：设 $\overrightarrow{v_1}, \dots, \overrightarrow{v_n}$ 是 $\mathcal{A}$ 的 n 个线性无关的特征向量

不妨设 $\overrightarrow{v_1}, \dots, \overrightarrow{v_{\iota_1}}$ 对应特征根 λ_1

$\overrightarrow{v_{\iota_1+1}}, \dots, \overrightarrow{v_{\iota_2}}$ 对应特征根 $\lambda_2 \cdots$

$\overrightarrow{v_{\iota_{m-1}+1}}, \dots, \overrightarrow{v_{\iota_m}}$ 对应特征根 λ_m

且 $i_m = n, \qquad \lambda_1, \quad \dots, \lambda_m \in F$ 两两不同

设 $\operatorname{spec}_F \mathcal{A} = \{\lambda_1, \dots, \lambda_m, \lambda_{m+1}, \dots, \lambda_k\}$

令 $U_1 = \langle \overrightarrow{v_1}, \dots, \overrightarrow{v_{\iota_1}} \rangle$，$U_2 = \langle \overrightarrow{v_{\iota_1+1}}, \dots, \overrightarrow{v_{\iota_2}} \rangle$，…，$U_m = \langle \overrightarrow{v_{\iota_m+1}}, \dots, \overrightarrow{v_{\iota_m}} \rangle$

则 $U_i \subset V^{\lambda_i}, \quad i = 1, \dots, m$

$\because V^{\lambda_1} + \cdots + V^{\lambda_m}$是直和 $\therefore U_1 + \cdots + U_m$ 是直和 $\big[$第一章命题 4.1$\big]$

$\dim(U_1 + \cdots + U_m) = \dim U_1 + \cdots + \dim U_m$ $\big[$第一章命题 4.2$\big]$

$= i_1 + i_2 - i_1 + \cdots + i_m - i_{m-1} = i_m = n$

$\because n = \dim V \quad \therefore U_1 + \cdots U_m = V \Rightarrow V^{\lambda_1} + \cdots + V^{\lambda_m} = V$

若 $k > m$, 则 $\dim V^{\lambda_{m+1}} > 0$

由定理 4.1， $V^{\lambda_1} + \cdots + V^{\lambda_m} + V^{\lambda_{m+1}}$ 是直和

$\Rightarrow \dim V > n$, 矛盾

于是 $\operatorname{spec}_F \mathcal{A} = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_m\}$

$(iii) \Rightarrow (i)$

设 $\operatorname{spec}_F \mathcal{A} = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_m\}$ 且 $V = V^{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus V^{\lambda_m} \quad [*]$

设$\overrightarrow{e_{j1}}, \ldots, \overrightarrow{e_{jk_j}}$ 是 V^{λ_j}的基，其中 $j = 1, \ldots, m$

由[*]， $\overrightarrow{e_{11}}, \ldots, \overrightarrow{e_{k_1}}, \ldots, \overrightarrow{e_{m1}}, \ldots, \overrightarrow{e_{mk_m}}$ 是 V 的一组基

$\forall j \in \{1, \ldots, m\}, k \in \{1, \ldots, k_j\}, \mathcal{A}\left(\overrightarrow{e_{jk}}\right) = \lambda_j \overrightarrow{e_{jk}}$

于是在该基下 $\mathcal{A}$ 的矩阵是

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 E_{k_1} & & O \\ & \ddots & \\ O & & \lambda_m E_m \end{pmatrix} \quad \blacksquare$$

【推论 5.1】n 个不同特征根即可对角化

设 $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$， $\dim V = n$

如果 $\mathcal{A}$ 在 F 中有 n 个互不相同的特征根

则 $\mathcal{A}$ 可对角化

证：设 $\operatorname{spec}_F \mathcal{A} = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$

$\because \lambda_1, \ldots, \lambda_n$ 互不相同,

由定理 4.1,$V^{\lambda_1} + \cdots + V^{\lambda_n}$是直和

$\because \dim V^{\lambda_i} \geq 1, \quad i = 1, \ldots, n$

$\therefore \dim\left(V^{\lambda_1} + \cdots + V^{\lambda_n}\right) \geq n$

$\because V^{\lambda_1} + \cdots + V^{\lambda_n} \subset V, \dim V = n$

$$\therefore V = V^{\lambda_1} + \cdots + V^{\lambda_n} = \bigoplus_{i=1}^{n} V^{\lambda_i}$$

由定理 5.1，推论成立 ■

注：$A \in M_n(F)$

A 可对角化 $\Leftrightarrow$ A 有 n 个线性无关的特征向量

如果 $\operatorname{card}(\operatorname{spec}_F A) = n$，则 A 可对角化

【例 5.1.2】对角化矩阵例

$\mathcal{A}$：$\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ 由下列关系确定

$$\left(\mathcal{A}(\overrightarrow{e_1}),\ \mathcal{A}(\overrightarrow{e_2}),\ \mathcal{A}(\overrightarrow{e_3})\right) = \left(\overrightarrow{e_1},\ \overrightarrow{e_2},\ \overrightarrow{e_3}\right)\underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}}_{A}$$

其中 $\overrightarrow{e_1}$，$\overrightarrow{e_2}$，$\overrightarrow{e_3}$ 是标准基

问 $\mathcal{A}$ 能否对角化？如果能，求 $\mathbb{R}^3$的一组基，

使 $\mathcal{A}$ 在该基下的矩阵是对角矩阵。

$$\mathcal{X}_{\mathcal{A}}(t) = |tE - A| = \begin{vmatrix} t-2 & -1 & -1 \\ -1 & t-2 & -1 \\ -1 & -1 & t-2 \end{vmatrix} = (t-4)(t-1)^2$$

$\mathcal{A}$ 有两个特征根，$\lambda_1 = 4$，$\lambda_2 = 1$

由命题 4.1，　$\dim V^{\lambda_1} = 1$，　$1 \le \dim V^{\lambda_2} \le 2$

求 V^{λ_1}的基

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}，\quad V^{\lambda_1} = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \coloneqq \langle \overrightarrow{\varepsilon_1} \rangle$$

求 V^{λ_2}的基

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}，\quad V^{\lambda_2} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle \coloneqq \langle \overrightarrow{\varepsilon_2},\ \overrightarrow{\varepsilon_3} \rangle$$

$3=\dim V^{\lambda_1}+\dim V^{\lambda_2}=\dim\left(V^{\lambda_1}+V^{\lambda_2}\right)\Rightarrow V^{\lambda_1}+V^{\lambda_2}=\mathbb{R}^3$

于是 $\mathcal{A}$ 可对角化，在 $\overrightarrow{\varepsilon_1}$，$\overrightarrow{\varepsilon_2}$，$\overrightarrow{\varepsilon_3}$ 下的矩阵是 $\begin{pmatrix}4&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ ■

【例 5.1.2】零约当块不能被对角化

证明

$$A=\begin{pmatrix}0&1&0&\cdots&0\\0&0&1&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\ddots&\ddots&\vdots\\\vdots&\vdots&\ddots&\ddots&1\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}_{n\times n}$$ 当 $n>1$ 时不能被对角化

$$\mathcal{X}_{\mathcal{A}}(t)=|tE-A|=\begin{vmatrix}t&-1&0&\cdots&0\\0&t&-1&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\ddots&\ddots&\vdots\\\vdots&\vdots&\ddots&\ddots&-1\\0&0&0&0&t\end{vmatrix}=t^n$$

特征根 $\lambda=0$，

$$V^{\lambda}\text{是}\overbrace{\begin{pmatrix}0&-1&0&\cdots&0\\0&0&-1&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\ddots&\ddots&\vdots\\\vdots&\vdots&\ddots&\ddots&-1\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}}^{B}\begin{pmatrix}x_1\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\\vdots\\0\end{pmatrix}\text{的解空间}$$

$\operatorname{rank}B=n-1\Rightarrow\dim V^{\lambda}=n-\operatorname{rank}B=1$

$\because n>1\quad\therefore\dim V^{\lambda}<\dim V=n,$

A 不能对角化 ■

注：二维例子 $\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$

【定理 5.2】可对角化的判定 2

设 $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$，则 A 可对角化 $\Leftrightarrow$

$(i)\mathcal{X}_A(t)$在$F[t]$ 中可以分解为一次因子之积

$(ii)\forall\lambda \in \operatorname{spec}_F A$，$\lambda$ 的几何重数 $=\lambda$ 的代数重数

注：$\mathcal{X}_A(t)=(t-\lambda_1)^{m_1}\cdots(t-\lambda_k)^{m_k}$，

λ_1，…，$\lambda_k \in F$，两两不同

证：$\Rightarrow$：设 $\mathcal{A}$ 在某组基下矩阵为 $\underbrace{\begin{pmatrix} \alpha_1 & & O \\ & \ddots & \\ O & & \alpha_n \end{pmatrix}}_{B}$

$$\mathcal{X}_{\mathcal{A}}(t)=\left|tE-\begin{pmatrix} \alpha_1 & & O \\ & \ddots & \\ O & & \alpha_n \end{pmatrix}\right|=\begin{vmatrix} t-\alpha_1 & & O \\ & \ddots & \\ O & & t-\alpha_n \end{vmatrix}$$

$=(t-\alpha_1)\cdots(t-\alpha_n)$

于是 (i) 成立

设 λ 在 α_1，…，α_n 中出现了正好 k次

则 $(t-\lambda)^k \mid \mathcal{X}_{\mathcal{A}}(t)$ 且 $(t-\lambda)^{k+1}$不整除$\mathcal{X}_{\mathcal{A}}(t)$

于是 λ 的代数重数是 k

而 V^λ是 $(\lambda E-B)\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$的解空间

λ 的几何重数 $=\dim V^\lambda$

$\because \lambda$ 在 $\alpha_1,\dots,\alpha_n$ 中出现 k 次

$\therefore \operatorname{rank}\ (\lambda E-B)=n-k \Rightarrow \dim V^\lambda=k$

$[\because \lambda E-B$ 是对角阵，且在对角线上有 k 个零$]$

$\Rightarrow \lambda$ 的几何重数 $=$ λ 的代数重数

$\Leftarrow$：设 $\mathcal{X}_{\mathcal{A}}(t)=(t-\lambda_1)^{m_1}\cdots(t-\lambda_k)^{m_k}$，

其中 $\lambda_1,\ldots,\lambda_k \in F$ 两两不同

$m_1, .., m_k \in \mathbb{Z}^+$ 且 $\dim V^i = m_i, \qquad i = 1, \dots, k$

$\dim\left(V^{\lambda_1} + \cdots + V^{\lambda_k}\right) = \dim V^{\lambda_1} + \cdots + \dim V^{\lambda_k}$

$= m_1 + \cdots + m_k = n \Rightarrow V^{\lambda_1} + \cdots + V^{\lambda_k} = V$

[定理 4.1 和第一章命题 4.3] ■

【例 5.2.3】对角化的应用：求斐波那契数列

第一卷 P72 例 3 设$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$，求 A^m

解：设 $f_0 = 0$，$f_1 = 1$，$f_{m+1} = f_m + f_{m-1}$ [$Fibonacci$序列]

$f_2 = 0 + 1 = 1$，$f_3 = 1 + 1 = 2$，$f_4 = 1 + 2 = 3$

$A = \begin{pmatrix} f_0 & f_1 \\ f_1 & f_2 \end{pmatrix}$，断言 $A^m = \begin{pmatrix} f_{m-1} & f_m \\ f_m & f_{m+1} \end{pmatrix}$，$m \geq 1$

归纳，当$m = 1$时断言成立

设 $m - 1$ 时断言成立

$A^m = A^{m-1}A = \begin{pmatrix} f_{m-2} & f_{m-1} \\ f_{m-1} & f_m \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} f_{m-1} & f_{m-2} + f_{m-1} \\ f_m & f_{m-1} + f_m \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} f_{m-1} & f_m \\ f_m & f_{m+1} \end{pmatrix}$,断言成立

$\mathcal{X}_A(t) = |tE - A| = \begin{vmatrix} t & -1 \\ -1 & t-1 \end{vmatrix} = t^2 - t - 1$，$\quad \triangle = 5 > 0$

$\therefore A$ 有两个不同的实根 $\Rightarrow A$ 可对角化

$\lambda_1 = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$，$\lambda_2 = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$

$V^{\lambda_1} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_1 \end{pmatrix} \right\rangle$，$V^{\lambda_2} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} \right\rangle$

$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 \end{pmatrix}$

$B^{-1}AB = B^{-1}A\left(\overrightarrow{B^{(1)}}, \overrightarrow{B^{(2)}}\right) = B^{-1}\left(A\overrightarrow{B^{(1)}}, A\overrightarrow{B^{(2)}}\right)$

$$= B^{-1}\left(\lambda_1\overrightarrow{B^{(1)}},\ \lambda_2\overrightarrow{B^{(2)}}\right) = \left(B^{-1}\lambda_1\overrightarrow{B^{(1)}},\ B^{-1}\lambda_2\overrightarrow{B^{(2)}}\right)$$

$$= \left(\lambda_1 B^{-1}\overrightarrow{B^{(1)}},\ \lambda_2 B^{-1}\overrightarrow{B^{(2)}}\right)$$

$$= \left(\lambda_1\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\ \lambda_2\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & \lambda_2\end{pmatrix}$$

$$B^{-1}AB = \begin{pmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & \lambda_2\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow A = B\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & \lambda_2\end{pmatrix}B^{-1}$$

$$\therefore A^m = B\begin{pmatrix}\lambda_1^m & 0\\ 0 & \lambda_2^m\end{pmatrix}B^{-1}$$

$$= \begin{pmatrix}1 & 1\\ \lambda_1 & \lambda_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda_1^m & 0\\ 0 & \lambda_2^m\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\dfrac{\lambda_2}{\lambda_2-\lambda_1} & \dfrac{-1}{\lambda_2-\lambda_1}\\ \dfrac{-\lambda_1}{\lambda_2-\lambda_1} & \dfrac{1}{\lambda_2-\lambda_1}\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}f_{m-1} & f_m\\ f_m & f_{m+1}\end{pmatrix}$$

$$f_m = \frac{\lambda_1^m-\lambda_2^m}{\lambda_1-\lambda_2} = \frac{1}{\sqrt5}\left(\left(\frac{1+\sqrt5}{2}\right)^m - \left(\frac{1-\sqrt5}{2}\right)^m\right)$$

$$f_m \sim \frac{1}{\sqrt5}\left(\frac{1+\sqrt5}{2}\right)^m, m\to\infty$$

【Lemma】**整系数矩阵的特征值不同则为整数**

Given a symmetric matrix with integer entries if the eigenvalues have distinct multiplicities then they are integer(s)

如果整系数对称矩阵的特征值的重数两两不同，则它们都是整数。

证：设该矩阵为 $A\in M_n(\mathbb{Z})$, 则 $\mathcal{X}_A(t)$为 n 次整系数多项式且首一

设 $\mathcal{X}_A(t) = p_1(t)^{m_1}\cdots p_s(t)^{m_s}$ 为 $\mathcal{X}_A(t)$ 在 $\mathbb{Q}[t]$中的不可约分解

因为 $\mathcal{X}_A(t)$ 首一，可假设所有的 $p_i(t)$ 都首一

如果 $\deg p_1 > 1$, 则 $p_1(t)$在 $\mathbb{C}$ 上有两个不同根 α_1, α_2

它们是 A 在 $\mathbb{C}$ 上的特征值，且有同样的重数，矛盾

于是所有的 p_i 都是一次的，即 $\mathcal{X}_A(t)$的所有根都是有理数

$\mathcal{X}_A(t) = (t-\alpha_1)^{m_1} \cdots (t-\alpha_s)^{m_s}$,

$\alpha_1, \ldots, \alpha_s \in \mathbb{Q}$ 两两不同，且 $m_1, \ldots, m_s$ 两两不同

因为 $\mathcal{X}_A(t) \in \mathbb{Z}$ 且首一，所以 $\alpha_1, \ldots, \alpha_s \in \mathbb{Z}$ ■

注：该引理不需要对称这个条件

注：设 $f \in \mathbb{Z}[x]$首一，则 f的有理根必为整根

证：设 $f = x^m + f_{m-1}x^{m-1} + \cdots + f_1 x + f_0$,

其中 $f_i \in \mathbb{Z}, i = 0,1, \ldots, m-1$

设 $r \in \mathbb{Q}$ 且 $f(r) = 0$, 设 $r = \dfrac{p}{q}$, 其中 $p, q \in \mathbb{Z}$ 且 $\gcd(p,q) = 1, q > 0$

$$0 = f\left(\frac{p}{q}\right) = \frac{p^m}{q^m} + f_{m-1}\frac{p^{m-1}}{q^{m-1}} + \cdots + f_1\frac{p}{q} + f_0$$

$$= \frac{p^m + f_{m-1}qp^{m-1} + \cdots + f_1 q^{m-1}p + f_0 q^m}{q^m}$$

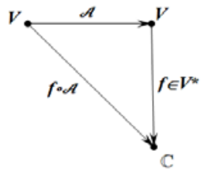
$$\Rightarrow p^m = -q(f_{m-1}p^{m-1} + \cdots + f_1 q^{m-2}p + f_0 q^{m-1})$$

$\because \gcd(p,q) = 1 \quad \therefore q = 1 \Rightarrow r \in \mathbb{Z}$ ■

§5.2 复数方阵的三角化

【引理 5.2】复算子有 n-1 维不变子空间

设 V 是 $\mathbb{C}$ 上的 n 维线性空间,$n>0,\mathcal{A}\in\mathcal{L}(V)$



则 $\mathcal{A}$ 有 $n-1$ 维不变子空间

证：回忆 $\mathcal{A}$ 的对偶算子

$\mathcal{A}^*:V^*\to V^*,f\mapsto f\circ\mathcal{A},\qquad \mathcal{A}^*\in\mathcal{L}(V^*)$

$\mathcal{X}_{\mathcal{A}^*}\in\mathbb{C}[t]$,次数为正， 由代数学基本定理 $\mathcal{A}^*$ 至少有一个特征根 λ

设 $g\in V^*$ 是 λ 所对应的特征向量,则 $\langle g\rangle$是 $\mathcal{A}^*$的一维不变子空间

$\langle g\rangle^\circ=\left\{\vec{v}\in V\middle|g(\vec{v})=\vec{0}\right\}$ 则 $\dim\langle g\rangle^\circ=n-1$

只要验证：$\langle g\rangle^\circ$ 是$\mathcal{A}-$子空间即可

设 $\vec{v}\in\langle g\rangle^\circ,g\big(\mathcal{A}(\vec{v})\big)=g\circ\mathcal{A}(\vec{v})=\mathcal{A}^*(g)(\vec{v})=(\lambda g)(\vec{v})$

$=\lambda g(\vec{v})=\lambda\cdot 0=0\Rightarrow\mathcal{A}(\vec{v})\in\langle g\rangle^\circ$

于是 $\langle g\rangle^\circ$ 是 $\mathcal{A}-$子空间 ■

【定理 5.3】复线性算子可上三角化

设 $\mathcal{A}\in\mathcal{L}(V)$,其中 V 是 $\mathbb{C}$ 上的 n 维线性空间，则存在 V 中的一组基

使得 $\mathcal{A}$ 在该基下的矩阵是上三角型的.

证：对 n 归纳，当 $n=1$ 时是显然的

设 $n-1$ 时定理成立， 设 $n=\dim V$

由引理 5.2,V 有 $n-1$ 维 $\mathcal{A}-$子空间 U,设 $\mathcal{A}\big|_U=\mathcal{A}_U$

则 $\mathcal{A}_U\in\mathcal{L}(U)$. 由归纳假设,$\exists U$中的一组基 $\overrightarrow{e_1},\dots,\overrightarrow{e_{n-1}}$

使得 $\mathcal{A}_U$在该基下的矩阵 $T_{n-1}\in M_{n-1}(\mathbb{C})$是上三角型

设 $\overrightarrow{e_1},\dots,\overrightarrow{e_{n-1}},\overrightarrow{e_n}$ 是V 的一组基,

$$\left(\mathcal{A}(\overrightarrow{e_1}),\dots,\mathcal{A}(\overrightarrow{e_{n-1}}),\mathcal{A}(\overrightarrow{e_n})\right)=\left(\mathcal{A}(\overrightarrow{e_1}),\dots,\mathcal{A}(\overrightarrow{e_{n-1}}),\mathcal{A}(\overrightarrow{e_n})\right)$$

$$=(\overrightarrow{e_1},\dots,\overrightarrow{e_{n-1}},\overrightarrow{e_n})\underbrace{\begin{pmatrix} & & & \alpha_1 \\ & T_{n-1} & & \vdots \\ & & & \alpha_{n-1} \\ 0 & \cdots & 0 & \alpha_n \end{pmatrix}}_{T_n}$$

其中 $\alpha_1,\dots,\alpha_{n-1},\alpha_n\in\mathbb{C}$,显然 T 是上三角型. ■

【推论 5.2】复方阵可上三角化

设 $A\in M_n(\mathbb{C})$,则 A相似于一个上三角矩阵

证：设 $\mathcal{A}:\mathbb{C}^n\to\mathbb{C}^n$, $\quad \begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}\mapsto A\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}$,

则 A 是 $\mathcal{A}$ 在标准基下的矩阵

由定理 5.3,$\exists\mathbb{C}^n$的一组基，使得 $\mathcal{A}$ 在该基下的矩阵为上三角矩阵 T

则 $A\sim_s T$ ■

【例 5.2.1】实方阵可能无法上三角化

$$B=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}\in M_2(\mathbb{R}),\mathcal{X}_B=\begin{vmatrix}t & -1\\ 1 & t\end{vmatrix}=t^2+1,$$

$$B\sim_s\underbrace{\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ 0 & \gamma\end{pmatrix}}_{A},\qquad \alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}$$

$$\mathcal{X}_A(t)=\begin{vmatrix}t-\alpha & -\beta\\ 0 & t-\gamma\end{vmatrix}=(t-\alpha)(t-\gamma)$$

§5.3 商映射 循环子空间和Cayley-Hamilton定理

【引理 5.3】商映射是线性算子

设 $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V), U$ 是 $\mathcal{A}-$子空间

定义 $\bar{\mathcal{A}}: V/_U \to V/_U, \quad \vec{v}+U \mapsto \mathcal{A}(\vec{v})+U$

则 $\bar{\mathcal{A}} \in \mathcal{L}(V/_U)$

证：验证 $\bar{\mathcal{A}}$是良定义的

设 $\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2} \in V$, 使得 $\overrightarrow{u_1}+U=\overrightarrow{u_2}+U$

即 $\overrightarrow{u_1}-\overrightarrow{u_2} \in U$ $[\sim_U$的定义$]$

则 $\mathcal{A}(\overrightarrow{u_1}-\overrightarrow{u_2}) \in U$ $[U$是 $\mathcal{A}-$子空间$]$

$\Rightarrow \mathcal{A}(\overrightarrow{u_1})-\mathcal{A}(\overrightarrow{u_2}) \in U$ $[\mathcal{A}$线性$]$

$\Rightarrow \mathcal{A}(\overrightarrow{u_1})+U=\mathcal{A}(\overrightarrow{u_2})+U$ $[\sim_U$的定义$]$

$\Rightarrow \bar{\mathcal{A}}(\overrightarrow{u_1}+U)=\bar{\mathcal{A}}(\overrightarrow{u_2}+U)$ $[\bar{\mathcal{A}}$的定义$]$

于是 $\bar{\mathcal{A}}$是良定义的

再验证 $\bar{\mathcal{A}}$是线性的. 设 $\alpha_1, \alpha_2 \in F, \quad \overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2} \in V$

$\bar{\mathcal{A}}\big(\alpha_1(\overrightarrow{v_1}+U)+\alpha_2(\overrightarrow{v_2}+U)\big)$

$=\bar{\mathcal{A}}\big((\alpha_1\overrightarrow{v_1}+\alpha_2\overrightarrow{v_2})+U\big)$ [商空间中线性运算]

$=\mathcal{A}(\alpha_1\overrightarrow{v_1}+\alpha_2\overrightarrow{v_2})+U$ $[\bar{\mathcal{A}}$的定义$]$

$=\big(\alpha_1\mathcal{A}(\overrightarrow{v_1})+\alpha_2(\overrightarrow{v_2})\big)+U$ $[\mathcal{A}$线性$]$

$=\alpha_1(\mathcal{A}(\overrightarrow{v_1})+U)+\alpha_2(\mathcal{A}(\overrightarrow{v_2})+U)$ [商空间中线性运算]

$=\alpha_1\bar{\mathcal{A}}(\overrightarrow{v_1}+U)+\alpha_2\bar{\mathcal{A}}(\overrightarrow{v_2}+U)$ $[\mathcal{A}$的定义$]$

$\Rightarrow \bar{\mathcal{A}} \in \mathcal{L}(V/_U)$ ■

【定义 5.3.1】商算子

设 $\mathcal{A}\in\mathcal{L}(V),U$是 $\mathcal{A}-$子空间,

则 $\bar{\mathcal{A}}:V/_U\to V/_U,\qquad \vec{v}+U\mapsto\mathcal{A}(\vec{v})+U$

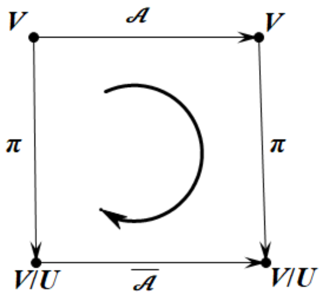
称为 $\mathcal{A}$ 关于 U 的商算子

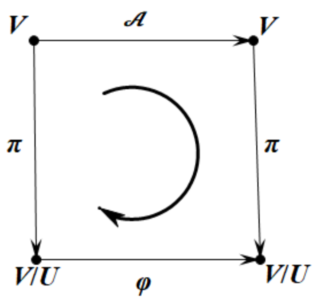
【命题 5.1】商算子基本性质

设 $\mathcal{A}\in\mathcal{L}(V),U$是$\mathcal{A}-$子空间,$\pi:V\to V/U$是自然投射，则

$(i)\pi\circ\mathcal{A}=\bar{\mathcal{A}}\circ\pi$

(ii)设 $\varphi:V/_U\to V/_U$ 使得 $\pi\circ\mathcal{A}=\varphi\circ\pi$,则 $\varphi=\bar{\mathcal{A}}$





证: $(i)\ \forall\ \vec{v}\in V$

$\pi\circ\mathcal{A}(\vec{v})=\pi(\mathcal{A}(\vec{v}))=\mathcal{A}(\vec{v})+U$

$\bar{\mathcal{A}}\circ\pi(\vec{v})=\bar{\mathcal{A}}(\vec{v}+U)=\mathcal{A}(\vec{v})+U$

$\therefore\pi\circ\mathcal{A}(\vec{v})=\bar{\mathcal{A}}\circ\pi(\vec{v}),\qquad \pi\circ\mathcal{A}\ =\bar{\mathcal{A}}\circ\pi$

$(ii)\forall\vec{v}\in V,\pi\circ\mathcal{A}(\vec{v})=\varphi\circ\pi(\vec{v})$

$\mathcal{A}(\vec{v})+U=\varphi(\vec{v}+U)$

$\Rightarrow\varphi=\bar{\mathcal{A}}\qquad$ ■

【例 5.3.1】恒同映射的商映射

设 U 是 V 的子空间，则 U 关于恒同映射 $\mathcal{E}$ 是不变的

$\bar{\mathcal{E}} = V/_U \rightarrow V/_U, \vec{v} + U \mapsto \mathcal{E}(\vec{v}) + U = \vec{v} + U$

于是商映射 $\bar{\mathcal{E}}$ 是 $V/_U$ 上的恒同映射

同理 $\bar{\mathcal{O}}$是 $V/_U$ 的零映射

【定理 5.4】商算子矩阵上三角化

设 V 是 n 维线性空间， $n > 1$, 设 $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$

U 是$\mathcal{A}$ − 子空间, $d \coloneqq \dim U > 0$

设 $\overrightarrow{e_1}, \dots, \overrightarrow{e_d}$ 是 U的基, $\overrightarrow{e_1}, \dots, \overrightarrow{e_d}, \overrightarrow{e_{d+1}}, \dots, \overrightarrow{e_n}$ 是 V 的基

令 $\mathcal{A}_U = \mathcal{A}\big|_U, \bar{\mathcal{A}}$ 是 $\mathcal{A}$ 关于 U的商算子

令 A_U 为 $\mathcal{A}_U$ 在 $\overrightarrow{e_1}, \dots, \overrightarrow{e_d}$下的矩阵 $[A_U \in M_d(F)]$

$\bar{A}$为$\bar{\mathcal{A}}$ 在 $\overrightarrow{e_{d+1}} + U, \dots, \overrightarrow{e_n} + U$ 下的矩阵 $[\bar{A} \in M_{n-d}(F)]$

则 $\mathcal{A}$ 在 $\overrightarrow{e_1}, \dots, \overrightarrow{e_d}, \overrightarrow{e_{d+1}}, \dots, \overrightarrow{e_n}$下的矩阵是

$A = \begin{pmatrix} A_U & B \\ O & \bar{A} \end{pmatrix}$, 其中 $B \in F^{d\times(n-d)}$

注：$\because \mathcal{A}_U \in \mathcal{L}(U)$ $\therefore A_U \in M_d(F)$ 存在且唯一

$\bar{\mathcal{A}} \in \mathcal{L}(V/_U)$ 而 $\overrightarrow{e_{d+1}} + U, \dots, \overrightarrow{e_n} + U$ 是$V/_U$的一组基

$\Big[$见第一章命题 5.1 的证明$\Big]$

证：$\forall j \in \{1, \dots, d\}, \overrightarrow{e_j} \in U \Rightarrow \mathcal{A}\left(\overrightarrow{e_j}\right) \in U$

$\mathcal{A}\left(\overrightarrow{e_j}\right) = \mathcal{A}_U\left(\overrightarrow{e_j}\right) = (\overrightarrow{e_1}, \dots, \overrightarrow{e_d})\overrightarrow{A_U^{(j)}}$

$= (\overrightarrow{e_1}, \dots, \overrightarrow{e_d})\overrightarrow{A_U^{(j)}} + (\overrightarrow{e_{d+1}}, \dots, \overrightarrow{e_n})\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$

$$= (\overrightarrow{e_1}, \dots, \overrightarrow{e_n}) \begin{pmatrix} \overrightarrow{A_U^{(J)}} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = (\overrightarrow{e_1}, \dots, \overrightarrow{e_n}) \overrightarrow{A^{(J)}}$$

$\forall j \in \{d+1, \dots, n\}$

$$\mathcal{A}(\overrightarrow{e_j}) + U = \bar{\mathcal{A}}(\overrightarrow{e_j} + U) = (\overrightarrow{e_{d+1}} + U, \dots, \overrightarrow{e_n} + U)\overrightarrow{\bar{A}^{(J)}}$$

$$\mathcal{A}(\overrightarrow{e_j}) + U = (\overrightarrow{e_{d+1}}, \dots, \overrightarrow{e_n})\overrightarrow{\bar{A}^{(J)}} + U$$

$$\mathcal{A}(\overrightarrow{e_j}) = (\overrightarrow{e_1}, \dots, \overrightarrow{e_d}) \begin{pmatrix} b_{1j} \\ \vdots \\ b_{dj} \end{pmatrix} + (\overrightarrow{e_{d+1}}, \dots, \overrightarrow{e_n})\overrightarrow{\bar{A}^{(J)}} \quad [b_{1j}, \dots, b_{dj} \in F]$$

$$= (\overrightarrow{e_1}, \dots, \overrightarrow{e_d}, \overrightarrow{e_{d+1}}, \dots, \overrightarrow{e_n}) \begin{pmatrix} B^{(j)} \\ \overrightarrow{\bar{A}^{(J)}} \end{pmatrix} = (\overrightarrow{e_1}, \dots, \overrightarrow{e_n}) A$$

其中 $B = \begin{pmatrix} b_{1,d+1} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{d,d+1} & \cdots & b_{d,n} \end{pmatrix}$ ■

【推论 5.3】商算子特征多项式分解

沿用定理 5.4 的记号，则

$$\mathcal{X}_{\mathcal{A}}(t) = \mathcal{X}_{\bar{\mathcal{A}}}(t)\mathcal{X}_{\mathcal{A}_U}(t)$$

证: $\mathcal{X}_{\mathcal{A}}(t) = |tE_n - A| = \left| t\begin{pmatrix} E_d & O \\ O & E_{n-d} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} A_U & B \\ O & \bar{A} \end{pmatrix} \right|$

$$= \begin{vmatrix} tE_d - A_U & -B \\ O & tE_{n-d} - \bar{A} \end{vmatrix} = |tE_d - A_U||tE_{n-d} - \bar{A}|$$

$$= \mathcal{X}_{\bar{\mathcal{A}}}(t)\mathcal{X}_{\mathcal{A}_U}(t)$$ ■

【命题 5.2】商算子可穿透多项式

设 $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$, U是 $\mathcal{A}-$子空间, $p \in F[t]$, 则

(i) U是 $p(\mathcal{A})-$子空间

(ii)设 $\bar{\mathcal{A}}$和 $\overline{p(\mathcal{A})}$是 $\mathcal{A}$ 和 $p(\mathcal{A})$关于 U 的商算子，则 $\overline{p(\mathcal{A})} = p(\bar{\mathcal{A}})$

证: $(i)\ \vec{u}\in U\Rightarrow\mathcal{A}(\vec{u})\in U\Rightarrow\mathcal{A}^2(\vec{u})\in U\Rightarrow\cdots$

简单归纳可知 $\forall k\in\mathbb{N},A^k(\vec{u})\in U$

即 U 也是 $\mathcal{A}^k-$子空间 $\left[\text{引理 }3.1\right]$

设 $\mathcal{B}\in\mathcal{L}(V)$ 如果 U 也是 $\mathcal{B}-$子空间

则 $\forall\alpha,\beta\in F,\vec{u}\in U,$

$(\alpha\mathcal{A}+\beta\mathcal{B})(\vec{u})=\alpha\mathcal{A}(\vec{u})+\beta\mathcal{B}(\vec{u})\in U\quad[\because\mathcal{A}(\vec{u}),\mathcal{B}(\vec{u})\in U]$

$\Rightarrow U$ 是 $(\alpha\mathcal{A}+\beta\mathcal{B})-$子空间

由上述结论可知 $p(\mathcal{A})(\vec{u})\in U$,即 U 是 $p(\mathcal{A})-$子空间

(ii)$\overline{\mathcal{A}^0}=\bar{\mathcal{E}}=(\bar{\mathcal{A}})^0,(\bar{\mathcal{A}})^1=\bar{\mathcal{A}}=\overline{\mathcal{A}^1}$

设 $\overline{\mathcal{A}^k}=\bar{\mathcal{A}}^k$

$\forall v\in V,\qquad\overline{\mathcal{A}^{k+1}}(\vec{v}+U)=\mathcal{A}^{k+1}(\vec{v})+U=\mathcal{A}\left(\mathcal{A}^k(\vec{v})\right)+U$

$=\bar{\mathcal{A}}(\mathcal{A}^k(\vec{v})+U)\quad\left[\bar{\mathcal{A}}\text{的定义}\right]$

$=\bar{\mathcal{A}}\left(\overline{\mathcal{A}^k}(\vec{v}+U)\right)\ \left[\overline{\mathcal{A}^k}\text{的定义}\right]$

$=\bar{\mathcal{A}}\left(\bar{\mathcal{A}}^k(\vec{v}+U)\right)\ \left[\text{归纳假设}\right]$

$=\bar{\mathcal{A}}^{k+1}(\vec{v}+U)$

$\Rightarrow\overline{\mathcal{A}^{k+1}}=\bar{\mathcal{A}}^{k+1}$

$\Rightarrow\overline{\mathcal{A}^k}=\bar{\mathcal{A}}^k,\forall k\in\mathbb{N}$

$\forall\vec{v}\in V,\qquad\pi\circ(\alpha\mathcal{A}+\beta\mathcal{B})(\vec{v}+U)=\pi\left(\alpha\big(\mathcal{A}(\vec{v})\big)+\beta\big(\mathcal{B}(\vec{v})\big)\right)$

$=[\alpha\mathcal{A}(\vec{v})+\beta\mathcal{B}(\vec{v})]+U$

$(\alpha\bar{\mathcal{A}}+\beta\overline{\mathcal{B}})\circ\pi(\vec{v})=(\alpha\bar{\mathcal{A}}+\beta\overline{\mathcal{B}})(\vec{v}+U)=\alpha\mathcal{A}(\vec{v})+\beta\mathcal{B}(\vec{v})+U$

由命题 $5.1(ii)$ $\overline{\alpha\mathcal{A}+\beta\mathcal{B}}=\alpha\bar{\mathcal{A}}+\beta\overline{\mathcal{B}}$

由上述两个结论 $p(\bar{\mathcal{A}})=\overline{p(\mathcal{A})}\qquad\blacksquare$

【定义 5.3.2】循环子空间

设 $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V), \vec{v} \in V$, 由 $\vec{v}, \mathcal{A}(\vec{v}), \mathcal{A}^2(\vec{v}), \dots$ 生成的子空间

称为由 $\mathcal{A}$ 和 $\vec{v}$ 生成的循环子空间

记为 $F[\mathcal{A}] \cdot \vec{v}$

【命题 5.3】循环子空间的基本性质

设 $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V), \vec{v} \in V$

$(i) F[\mathcal{A}] \cdot \vec{v}$ 是 $\mathcal{A} -$ 子空间

$(ii) F[\mathcal{A}] \cdot \vec{v} = \{p(\mathcal{A})(\vec{v}) | p \in F[t]\}$

$(iii) \dim F[\mathcal{A}] \cdot \vec{v} = d$

$\Leftrightarrow \vec{v}, \mathcal{A}(\vec{v}), \dots, \mathcal{A}^{d-1}(\vec{v})$ 是 $F[\mathcal{A}] \cdot \vec{v}$ 的一组基 $(\vec{v} \neq 0)$

证: (i)设 $\vec{u} \in F[\mathcal{A}] \cdot \vec{v}$

则$\exists \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_k \in F, \vec{u} = \alpha_0 \vec{v} + \alpha_1 \mathcal{A}(\vec{v}) + \alpha_k \mathcal{A}^k(\vec{v})$

$\mathcal{A}(\vec{u}) = \mathcal{A}\left(\alpha_0 \vec{v} + \alpha_1 \mathcal{A}(\vec{v}) + \alpha_k \mathcal{A}^k(\vec{v})\right)$

$= \alpha_0 \mathcal{A}(\vec{v}) + \alpha_1 \mathcal{A}^2(\vec{v}) + \cdots + \alpha_k \mathcal{A}^{k+1}(\vec{v}) \in F[\mathcal{A}] \cdot \vec{v}$

$\therefore (i)$成立

(ii)设 $p \in F[t]$, 把 p 写成 $p(t) = \beta_m t^m + \beta_{m-1} t^{m-1} + \cdots + \beta_1 t + \beta_0$

其中 $\beta_i \in F, i = 0, \dots, m$

$p(\mathcal{A}) = \beta_m \mathcal{A}^m + \beta_{m-1} \mathcal{A}^{m-1} + \cdots + \beta_1 \mathcal{A} + \beta_0 \mathcal{E}$

$p(\mathcal{A})(\vec{v}) = \beta_m \mathcal{A}^m(\vec{v}) + \beta_{m-1} \mathcal{A}^{m-1}(\vec{v}) + \cdots + \beta_1 \mathcal{A}(\vec{v}) + \beta_0 \vec{v}$

$\therefore p(\mathcal{A})(\vec{v}) \in F[\mathcal{A}] \cdot \vec{v}$

反之，设 $\vec{u}$ 如 (i)中给出

令 $p(t) = \alpha_0 + \alpha_1 t + \cdots + \alpha_k t^k$

则 $\vec{u} = p(\mathcal{A})(\vec{v})$

$\Rightarrow F[\mathcal{A}]\cdot\vec{v}=\{p[\mathcal{A}](\vec{v})|p\in F[t]\}$, (ii)成立

$(iii) \Leftarrow$ 由定义显然

$\Rightarrow$: 设 k为使得 $\vec{v},\mathcal{A}(\vec{v}),\dots,\mathcal{A}^{k-1}(\vec{v})$线性无关的最大正整数

则$\mathcal{A}^k(\vec{v})\in\langle\vec{v},\mathcal{A}(\vec{v}),\dots,\mathcal{A}^{k-1}(\vec{v})\rangle$

并且$\exists\alpha_0,\alpha_1,\dots,\alpha_{k-1}\in F$

使得 $\mathcal{A}^k(F)=\alpha_0\vec{v}+\alpha_1\mathcal{A}(\vec{v})+\cdots+\alpha_{k-1}\mathcal{A}^{k-1}(\vec{v})$

令 $f[t]=t^k-\alpha_{k-1}t^{k-1}-\cdots-\alpha_1 t-\alpha_0$, 则 $f[\mathcal{A}](\vec{v})=0$

设 $\vec{u}\in F[\mathcal{A}]\cdot\vec{v}$, 由$(ii)$ $\exists p(t)\in F[t]$, 使得 $\vec{u}=p(\mathcal{A})(\vec{v})$

由一元多项式带余除法

$p(t)=q(t)f(t)+r(t)$ 其中 $q,r\in F[t],\deg r<\deg f=k$

$\therefore p(\mathcal{A})=q(\mathcal{A})f(\mathcal{A})+r(\mathcal{A})$

$\vec{u}=p(\mathcal{A})(\vec{v})=q(\mathcal{A})f(\mathcal{A})(\vec{v})+r(\mathcal{A})(\vec{v})=r(\mathcal{A})(\vec{v})$

$\because \deg r<k$

$\therefore \vec{u}\in\langle\vec{v},\mathcal{A}(\vec{v}),\dots,\mathcal{A}^{k-1}(\vec{v})\rangle$

$\Rightarrow \vec{v},\mathcal{A}(\vec{v}),\dots,\mathcal{A}^{k-1}(\vec{v})$是 $F[\mathcal{A}]\cdot\vec{v}$的一组基

$\therefore \dim F[\mathcal{A}]\cdot\vec{v}=k$

$\because d=\dim F[\mathcal{A}]\cdot\vec{v}\quad\therefore k=d$

$\therefore \vec{v},\mathcal{A}(\vec{v}),\dots,\mathcal{A}^{d-1}(\vec{v})$是 $F[\mathcal{A}]\cdot\vec{v}$的一组基

【例 5.3.2】求循环子空间例

设 $\mathcal{A}:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2,\qquad \begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}\mapsto\underbrace{\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}}_{A}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}$

设 $\vec{v}=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix},\vec{w}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$, 求 $\mathbb{R}[\mathcal{A}]\cdot\vec{v}$ 和 $\mathbb{R}[\mathcal{A}]\cdot\vec{w}$ 的维数

解: $\mathcal{A}^0(\vec{v})=\vec{v}=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix},\mathcal{A}^1(\vec{v})=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$

$\Rightarrow \dim \mathbb{R}[\mathcal{A}] \cdot \vec{v} = 2$

$\mathcal{A}^0(\vec{w}) = \vec{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathcal{A}^1(\vec{w}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \dim \mathbb{R}[\mathcal{A}] \cdot \vec{w} = 1$

【定义 5.3.3】关于线性算子和向量的极小多项式

设$\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V), \vec{v} \in V, p \in F[t]$

(i)如果$p(\mathcal{A})(\vec{v}) = 0$, 则称 $p(t)$是关于 $\mathcal{A}$ 和 $\vec{v}$ 的零化多项式(零化子)

(ii)在关于 $\mathcal{A}$ 和 $\vec{v}$的所有零化子中，非零、次数最低且首一的多项式

称为关于 $\mathcal{A}$ 和 $\vec{v}$ 的极小多项式，记为$\mu_{\mathcal{A},\vec{v}}$

【命题 5.4】线性算子向量极小多项式基本性质

设 $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V), \vec{v} \in V$

$(i)\mu_{\mathcal{A},\vec{v}}$存在且唯一

(ii)如果 $p \in F[t]$ 是关于 $\mathcal{A}$ 和 $\vec{v}$ 的零化子，则 $\mu_{\mathcal{A},\vec{v}} | p$

特别地, $\mu_{\mathcal{A},\vec{v}} \,\big|\, \mu_{\mathcal{A}}$

$(iii) \dim F[\mathcal{A}] \cdot \vec{v} = \deg \mu_{\mathcal{A},\vec{v}}$

证: $(i) \because \mu_{\mathcal{A}} \in F[t] \setminus F$ 零化 $\mathcal{A}$ $\quad \therefore \mu_{\mathcal{A}}$是关于 $\mathcal{A}$和 $\vec{v}$ 的零化子

于是 $\mu_{\mathcal{A},\vec{v}}$存在

设 $f, g \in F[t]$ 是关于 $\mathcal{A}, \vec{v}$ 的极小多项式, 则 $\deg f = \deg g$

$\because f\,, g$首一 $\quad \therefore \deg(f - g) < \deg f$

$\because (f - g)(\mathcal{A})(\vec{v}) = f(\mathcal{A})\, \vec{v} - g(\mathcal{A})\vec{v} = \vec{0}$

$\therefore f - g$也是关于 $\mathcal{A}$和 $\vec{v}$ 的零化子，由极小性可知 $f - g = 0$

$\therefore f = g$ 唯一性成立

(ii)设 $p \in F[t]$ 是关于 $\mathcal{A}$ 和 $\vec{v}$ 的零化子

由多项式除法,$p(t)=q(t)\mu_{\mathcal{A},\vec{v}}(t)+r(t),q,r\in F[t]$

$\deg r<\deg\mu_{\mathcal{A},\vec{v}}$

$\therefore p(\mathcal{A})=q(\mathcal{A})\mu_{\mathcal{A},\vec{v}}(\mathcal{A})+r(\mathcal{A})$

$\therefore 0=p(\mathcal{A})(\vec{v})=q(\mathcal{A})\mu_{\mathcal{A},\vec{v}}(\mathcal{A})(\vec{v})+r(\mathcal{A})(\vec{v})=0+r(\mathcal{A})(\vec{v})$

$\Rightarrow r(\mathcal{A})(\vec{v})=0\Rightarrow r$是关于$\mathcal{A},\vec{w}$的零化子$\Rightarrow r=0$

$\mu_{\mathcal{A},\vec{v}}|\,\mu_{\mathcal{A}}\to$柯$II,P56,9(i)$

(iii)设$\mu_{\mathcal{A},\vec{v}}(t)=t^d+\beta_{d-1}t^{d-1}+\cdots+\beta_0\,,\beta_i\in F,i=0,\dots,d-1$

$\mu_{\mathcal{A},\vec{v}}(\mathcal{A})(\vec{v})=\mathcal{A}^d(\vec{v})+\beta_{d-1}\mathcal{A}^{d-1}(\vec{v})+\cdots+\beta_0\vec{v}=\vec{0}$

于是$\vec{v},\mathcal{A}^1(\vec{v}),\dots,\mathcal{A}^{d-1}(\vec{v}),\mathcal{A}^d(\vec{v})$线性相关

但$\because\deg\mu_{\mathcal{A},\vec{v}}=d\quad\therefore\vec{v},\mathcal{A}(\vec{v}),\dots,\mathcal{A}^{d-1}(\vec{v})$线性无关$\big[$由极小性$\big]$

由命题5.3(iii),$\dim F[\mathcal{A}]\vec{v}=d$ ■

【例5.3.3】求线性算子向量极小多项式例

设$\mathcal{A}:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$

$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix},\qquad\vec{v}=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix},\vec{w}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$

计算$\mu_{\mathcal{A},\vec{v}},\mu_{\mathcal{A},\vec{w}}$

$\mathcal{A}^0(\vec{v})=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix},\mathcal{A}^1(\vec{v})=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\mathcal{A}^2(\vec{v})=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$

$1\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}+0\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+0\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$

$\therefore\mu_{\mathcal{A},\vec{v}}=t^2$

$\mathcal{A}^0(\vec{w})=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\mathcal{A}^1(\vec{w})=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$

$\mathcal{A}^1(\vec{w})+0\mathcal{A}^0(\vec{w})=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$

$\therefore\mu_{\mathcal{A},\vec{w}}=t$

【引理 5.4】极小多项式等于特征多项式的条件

设$\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$ 且 $\vec{v} \in V$

如果 $V = F[\mathcal{A}] \cdot \vec{v}$, 则 $\mu_{\mathcal{A}} = \mathcal{X}_{\mathcal{A}}$

特别地, $\mathcal{X}_{\mathcal{A}}(t)$ 零化 $\mathcal{A}$

证: 设 $n = \dim V$, 由命题 3.3 (iii)

$\vec{v}, \mathcal{A}(\vec{v}), \dots, \mathcal{A}^{n-1}(\vec{v})$ 是 V 的一组基

设$\mu_{\mathcal{A}}(t) = t^n + \alpha_{n-1}t^{n-1} + \cdots + \alpha_0$

$\Rightarrow \mathcal{A}^n + \alpha_{n-1}\mathcal{A}^{n-1} + \cdots + \alpha_0\mathcal{E} = \mathcal{O}$

$\Rightarrow \mathcal{A}^n(\vec{v}) = -\alpha_0\vec{v} - \alpha_1\mathcal{A}(\vec{v}) - \cdots - \alpha_{n-1}\mathcal{A}^{n-1}(\vec{v})$

$$\left(\mathcal{A}(\vec{v}), \mathcal{A}^2(\vec{v}), \dots, \mathcal{A}^n(\vec{v})\right)$$

$$= \left(\vec{v}, \mathcal{A}(\vec{v}), \dots, \mathcal{A}^{n-1}(\vec{v})\right)\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & -\alpha_0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & -\alpha_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & -\alpha_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & -\alpha_{n-2} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & -\alpha_{n-1} \end{pmatrix}$$

由定义，右端矩阵为 $\mathcal{A}$ 在基 $\vec{v}, \mathcal{A}(\vec{v}), \dots, \mathcal{A}^{n-1}(\vec{v})$ 下的矩阵，记为 A

$$\mathcal{X}_{\mathcal{A}}(t) = \mathcal{X}_A(t) = |tE - A| = \begin{vmatrix} t & 0 & \cdots & 0 & 0 & \alpha_0 \\ -1 & t & \cdots & 0 & 0 & \alpha_1 \\ 0 & -1 & \cdots & 0 & 0 & \alpha_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & t & \alpha_{n-2} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 & t + \alpha_{n-1} \end{vmatrix}$$

通过对 n 归纳可得

$\mathcal{X}_{\mathcal{A}}(t) = t^n + \alpha_{n-1}t^{n-1} + \cdots + \alpha_1 t + \alpha_0 = \mu_{\mathcal{A}}(t)$ ■

【定理 5.5】Cayley-Hamilton

设 $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$ 则 $\mathcal{X}_{\mathcal{A}}(\mathcal{A}) = \mathcal{O}$

证: 设$n = \dim V$, 对 n归纳

$n = 1$ 时 设 $\mathcal{A}$的某个矩阵为 (a) , $a \in F$

即 $\forall\vec{v}\in V,\mathcal{A}\vec{v}=a\vec{v}$

$\mathcal{X}_{\mathcal{A}}(t)=|t(1)-(a)|=t-a,\qquad \mathcal{X}_{\mathcal{A}}(\mathcal{A})=\mathcal{A}-a\mathcal{E}$

$\forall\vec{v}\in V,\mathcal{X}_{\mathcal{A}}(\mathcal{A})(\vec{v})=\mathcal{A}(\vec{v})-a\mathcal{E}(\vec{v})=a\vec{v}-a\vec{v}=\vec{0}$

于是 $\mathcal{X}_{\mathcal{A}}(\mathcal{A})=\mathcal{O}$

设 $1\le\dim V<n$ 时定理成立

在 $\dim V=n$ 时

情形 1 V有非平凡 $\mathcal{A}-$子空间 U

则 $\dim U,\dim V/U\in\{1,2,\dots,n-1\}$

令$\mathcal{A}_U=\mathcal{A}\big|_U,\bar{\mathcal{A}}$为$\mathcal{A}$ 关于 U的商算子

由推论 5.2 , $\mathcal{X}_{\mathcal{A}}(t)=\mathcal{X}_{\mathcal{A}_U}(t)\mathcal{X}_{\bar{\mathcal{A}}}(t)$

于是 $\mathcal{X}_{\mathcal{A}}(\mathcal{A})=\mathcal{X}_{\mathcal{A}_U}(\mathcal{A})\mathcal{X}_{\bar{\mathcal{A}}}(\mathcal{A})$

设 $\vec{v}\in V,\mathcal{X}_{\mathcal{A}}(\mathcal{A})(\vec{v})=\mathcal{X}_{\mathcal{A}_U}(\mathcal{A})\mathcal{X}_{\bar{\mathcal{A}}}(\mathcal{A})(\vec{v})$

令 $\mathcal{B}=\mathcal{X}_{\bar{\mathcal{A}}}(\mathcal{A})$, 由命题 5.2(i),U是 $\mathcal{B}-$子空间

设 $\overline{\mathcal{B}}$是 $\mathcal{B}$ 关于 U 的商算子, 则

$\overline{\mathcal{B}}(\vec{v}+U)=\overline{\mathcal{X}_{\bar{\mathcal{A}}}(\mathcal{A})}(\vec{v}+U)=\mathcal{X}_{\bar{\mathcal{A}}}(\bar{\mathcal{A}})(\vec{v}+U)\quad$ [命题 5.2(ii)]

由归纳假设 $\mathcal{X}_{\bar{\mathcal{A}}}(\bar{\mathcal{A}})=\bar{\mathcal{O}}\Rightarrow\overline{\mathcal{X}_{\bar{\mathcal{A}}}(\mathcal{A})}(\vec{v}+U)=\vec{0}+U$

$\Rightarrow\mathcal{X}_{\bar{\mathcal{A}}}(\mathcal{A})(\vec{v})\in U$

令 $\vec{w}=\mathcal{X}_{\bar{\mathcal{A}}}(\mathcal{A})(\vec{v})$, 则 $\vec{w}\in U$

$\mathcal{X}_{\mathcal{A}}(\mathcal{A})(\vec{v})=\mathcal{X}_{\mathcal{A}_U}(\mathcal{A})\left(\mathcal{X}_{\mathcal{A}}\left(\mathcal{A}(\vec{v})\right)\right)=\mathcal{X}_{\mathcal{A}_U}(\mathcal{A})(\vec{w})$

$=\mathcal{X}_{\mathcal{A}_U}(\mathcal{A}_U)(\vec{w})=\mathcal{O}_U(\vec{w})=\vec{0}\quad$ [归纳假设]

由此可知 $\mathcal{X}_{\mathcal{A}}(\mathcal{A})=\mathcal{O}$ 定理成立

情形 2　V中没有非平凡$\mathcal{A}-$子空间

取 $\vec{v}\in V\setminus\{0\}$,则由命题 5.3$(i)$,$V=F[\mathcal{A}]\cdot\vec{v}$

由引理 5.4,$\mu_{\mathcal{A}}(t)=\mathcal{X}_{\mathcal{A}}(t)$

$\Rightarrow \mathcal{X}_{\mathcal{A}}(\mathcal{A})=\mu_{\mathcal{A}}(\mathcal{A})=\mathcal{O}$　定理成立　■

【推论 5.4】极小多项式次数限制

设 $n=\dim V$,$\mathcal{A}\in\mathcal{L}(V)$,则 $\deg\mu_A\leq n$

证:$\mu_{\mathcal{A}}|\mathcal{X}_{\mathcal{A}}(C-H$定理,定理 2.2$(i))$

$\Rightarrow \deg\mu_{\mathcal{A}}\leq\deg\mathcal{X}_{\mathcal{A}}=n$　■

【推论 5.5】方阵版 C-H 定理

设 $A\in M_n(F)$

$(i)\mathcal{X}_A(t)$零化 A

$(ii)\mu_A|\mathcal{X}_A$　从而 $\deg\mu_A\leq n$

证:把 A 看成 $F^n\to F^n$ 的线性算子，或利用定理 2.1 中的代数同构

【例 5.3.4】C-H 定理的伪证

$\mathrm{C}-\mathrm{H}$ 定理的伪证

$A\in M_n(F)\qquad \mathcal{X}_A(t)=|tE-A|$

$\mathcal{X}_A(A)=|AE-A|=|A-A|=0$ ■

$$\mathcal{X}_A(t)=|tE-A|=\sum_{\sigma\in S_n}\prod_{k=1}^{n}\left(t\delta_{k\sigma(k)}-a_{k\sigma(k)}\right)$$

$$\mathcal{X}_A(A)=|\text{"}A\text{"}\,E-A|=\sum_{\sigma\in S_n}\prod_{k=1}^{n}\left(A\delta_{k\sigma(k)}-a_{k\sigma(k)}\right)$$

$$|AE-A|=\sum_{\sigma\in S_n}\prod_{k=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n}a_{ki}\delta_{i\sigma(k)}-a_{k\sigma(k)}\right)$$

一方面，两个零不同：一个是零矩阵，一个是代数零

另一方面，多项式的表达中若有t乘矩阵，

切不可先代入A将A与矩阵相乘。

§6 各种类型的直和分解

§6.1 预备引理

【引理 6.1】乘积多项式的简单数论

设 $p_1,\dots,p_k,q\in F[t]\setminus\{0\}$

(i)如果 $\forall i\in\{i,\dots,k\},\gcd(p_i,q)=1$,则 $\gcd(p_1\cdots p_k,q)=1$

(ii)如果 $p_1,\dots,p_k$ 两两互素且 $p_i\,|\,q,i=1,\dots,k$,则 $(p_1\cdots p_k)\,|\,q$

证: $(i)\because \gcd(p_i,q)=1$

$\therefore \exists a_i,b_i\in F[t]$ 使得 $a_ip_i+b_iq=1,\qquad i=1,\dots k$ [Bezout 关系]

$$\prod_{i=1}^{k}(a_ip_i+b_iq)=1\Rightarrow\left(\prod_{i=1}^{k}a_i\right)\left(\prod_{i=1}^{k}p_i\right)+cq=1,c\in F[t]$$

于是 $\gcd\left(\prod_{i=1}^{k}p_i\,,q\right)=1$ (i)成立

(ii)对k归纳,$k=1$ 显然

设 $k-1$ 时断言成立，考虑 k 时

令 $p=p_1\cdots p_{k-1}$ 由归纳假设,$p\,|\,q$

由(i),$\gcd(p,p_k)=1$

$\therefore \exists a,b\in F[t]$,使得 $ap+bp_k=1$

由归纳假设 $p\,|\,q$ 即 $\exists f\in F[t],q=fp$

$\because\ p_k\,|\,q\quad \therefore \exists g\in F[t],q=gp_k$

$\because apq+bp_kq=q\ \ \therefore apgp_k+bp_kfp=q$

$\Rightarrow (p_1\cdots p_k)(ag+bf)=q$

$\Rightarrow (p_1\cdots p_k)\,|\,q\qquad\blacksquare$

【引理 6.2】互素多项式的最小公倍式

设 $p_1,\ldots,p_k \in F[t]\setminus\{0\}$ 两两互素

则 $\mathrm{lcm}(p_1,\ldots,p_k) = p_1\cdots p_k$

证:$\because p_i \mid \mathrm{lcm}(p_1,\ldots,p_k)$, $\qquad i=1,\ldots,k$

$\therefore (p_1\cdots p_k) \mid \mathrm{lcm}(p_1,\ldots,p_k) \qquad$ [引理 6.1(ii)]

另一方面, $\mathrm{lcm}(p_1,\ldots,p_k) \mid (p_1\cdots p_k)$

$\therefore (p_1\cdots p_k) = \mathrm{lcm}(p_1\cdots p_k)$

严格地讲,它们在 F上相伴 $\qquad\blacksquare$

【引理 6.3】直和分解基本引理

设 $\mathcal{A}\in\mathcal{L}(V), f\in F[t]$零化 $\mathcal{A}$

设$f = pq$, 其中 $p,q\in F[t]\setminus F$且$\gcd(p,q)=1$

令$K_p = \ker p(\mathcal{A}), K_q = \ker q(\mathcal{A})$ 则

$(i) K_p, K_q$ 是$\mathcal{A}-$子空间, 且 $V = K_p \oplus K_q$

$(ii) p(\mathcal{A})\big|_{K_q}$和 $q(\mathcal{A})\big|_{K_p}$ 都是双射

(iii)设 $f=\mu_{\mathcal{A}}$ 且 p,q首一, 则p,q分别是$\mathcal{A}\big|_{K_p}, \mathcal{A}\big|_{K_q}$的极小多项式

证: 由命题 3.1(ii), K_p, K_q是$\mathcal{A}-$子空间

$\because \gcd(p,q)=1 \quad \therefore \exists a,b\in F[t]$ 使得 $a(t)p(t)+b(t)q(t)=1$

于是 $a(\mathcal{A})p(\mathcal{A})+b(\mathcal{A})q(\mathcal{A})=\mathcal{E}$

设 $\vec{v} \in V$, 我们有 $\underbrace{a(\mathcal{A}) \circ p(\mathcal{A})(\vec{v})}_{\overrightarrow{v_q}} + \underbrace{b(\mathcal{A}) \circ q(\mathcal{A})(\vec{v})}_{\overrightarrow{v_p}} = \mathcal{E}(\vec{v}) = \vec{v}$ [*]

$$\begin{aligned} q(\mathcal{A})\left(\overrightarrow{v_q}\right) &= q(\mathcal{A}) \circ a(\mathcal{A}) \circ p(\mathcal{A})(\vec{v}) \\ &= a(\mathcal{A}) \circ q(\mathcal{A}) \circ p(\mathcal{A})(\vec{v}) \\ &= a(\mathcal{A}) \circ f(\mathcal{A})(\vec{v}) \\ &= a \circ \mathcal{O}(\vec{v}) = \vec{0} \end{aligned}$$

$\Rightarrow \overrightarrow{v_q} \in K_q$

同理,$\overrightarrow{v_p} \in K_p$ 由此可知 $V = K_p + K_q$

设 $\vec{w} \in K_p \cap K_q$, 由[*]

$\vec{w} = a(\mathcal{A}) \circ p(\mathcal{A})(\vec{w}) + b(\mathcal{A}) \circ q(\mathcal{A})(\vec{w}) = \vec{0}$

$\Rightarrow K_p \cap K_q = \{\vec{0}\}$

于是 $V = K_p \bigoplus K_q$

(ii)由命题 5.2(i),K_q是 $p(\mathcal{A}) -$ 子空间

令 $\mathcal{B} = p(\mathcal{A})\big|_{K_q}$ 则 $\mathcal{B} \in \mathcal{L}(K_q)$

要证 $\mathcal{B}$ 是双射，只需证 $\mathcal{B}$ 是单射,即 $\ker \mathcal{B} = \{\vec{0}\}$

设 $\vec{v} \in \ker \mathcal{B} \Rightarrow p(\mathcal{A})(\vec{v}) = \vec{0} \Rightarrow a(\mathcal{A}) \circ p(\mathcal{A})(\vec{v}) = \vec{0}$

$\vec{v} \in K_q \Rightarrow q(\mathcal{A})(\vec{v}) = \vec{0} \Rightarrow b(\mathcal{A}) \circ q(\mathcal{A})(\vec{v}) = \vec{0}$

$\vec{0} = a(\mathcal{A}) \circ p(\mathcal{A})(\vec{v}) + b(\mathcal{A}) \circ q(\mathcal{A})(\vec{v}) = \vec{v}$ [由 * 式]

$\Rightarrow \ker B = \{\vec{0}\}$

(iii)设 $\mathcal{A}_p = \mathcal{A}\big|_{K_p}$, $\quad \mathcal{A}_q = \mathcal{A}\big|_{K_q}$

$\because K_p = \ker p(\mathcal{A}) \quad \therefore \forall \vec{v} \in K_p, p(\mathcal{A})(\vec{v}) = p(\mathcal{A}_p)(\vec{v}) = \vec{0}$

于是 p零化 $\mathcal{A}_p$, 由定理 2.2 可知 $\mu_{\mathcal{A}_p} \big| p$, 同理,$\mu_{\mathcal{A}_q} \big| q$

$\because \gcd(p, q) = 1 \quad \therefore \gcd\left(\mu_{\mathcal{A}_p}, \mu_{\mathcal{A}_q}\right) = 1$

$\mu_{\mathcal{A}} = \mathrm{lcm}\left(\mu_{\mathcal{A}_p}, \mu_{\mathcal{A}_q}\right)$ [命题 3.3(ii)]

$= \mu_{\mathcal{A}_p}\mu_{\mathcal{A}_q}$ [引理 6.2]

另一方面，$\mu_{\mathcal{A}} = pq = \mu_{\mathcal{A}_p}\mu_{\mathcal{A}_q}$

$\Rightarrow p = \mu_{\mathcal{A}_p}, q = \mu_{\mathcal{A}_q}$ ■

§6.2 广义特征子空间

【定义 6.2.1】广义特征子空间

设 $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V), \mu_{\mathcal{A}}$ 在 $F[t]$中不可约分解为 $\mu_{\mathcal{A}} = p_1^{m_1} \cdots p_s^{m_s}$

其中 $p_1, \dots, p_s \in F[t] \setminus F$ 首一，不可约，两两互素，$m_1, \dots, m_s \in \mathbb{Z}^+$

则称 $\ker p_i^{m_i}(\mathcal{A})$为 $\mathcal{A}$ 关于因子p_i的广义特征子空间，记为 $V(p_i)$

$i = 1, \dots, s$

注：书中定义的根子空间是广义特征子空间的特例

【定理 6.1】广义特征子空间分解

利用上述记号，我们有

$V = V(p_1) \oplus \cdots \oplus V(p_s)$

且 (i) $p_i^{m_i}$ 是 $\mathcal{A}\big|_{V(p_i)}$的极小多项式

(ii) $p_i(\mathcal{A})$在 $V(p_1) \oplus \cdots \oplus V(p_{i-1}) \oplus V(p_{i+1}) \oplus \cdots \oplus V(p_s)$ 上可逆

$i = 1, \dots, s$

证:对 s归纳. $s = 1$ 时 $\mu_{\mathcal{A}} = p_1^{m_1}$

$V(p_1) = \ker p_1^{m_1}(\mathcal{A}) = \ker \mu_{\mathcal{A}}(\mathcal{A}) = \ker(\mathcal{O}) = V$

性质 $(i)(ii)$自然满足

设 $s > 1$ 且定理对 $s - 1$ 成立

令 $p = p_1^{m_1} \cdots p_{s-1}^{m-1}, q = p_s^{m_s}$，由引理 6.1$(i)$，$\gcd(p, q) = 1$

由引理 6.3，$V = U \oplus V(p_s)$，其中 $U = \ker p(\mathcal{A})$

且 $\mathcal{A}\big|_U$ 的极小多项式是 p,　　$q(\mathcal{A})\big|_U$ 是双射

令 $\mathcal{A}_U = \mathcal{A}\big|_U$，对 $\mathcal{A}_U, p = p_1^{m_1} \cdots p_{s-1}^{m-1}$，和 U用归纳假设得到

$U = U(p_1) \oplus \cdots \oplus U(p_{s-1})$

其中 $U(p_j) = \ker p_j^{m_j}(\mathcal{A}_U), j = 1, \dots, s-1$

且 $\mathcal{A}_U$ 限制在 $U(p_j)$上的极小多项式为 $p_j^{m_j}, j = 1, \dots, s-1$

下面验证: $U(p_j) = V(p_j), j = 1, \dots, s-1$

不妨只验证 $U(p_1) = V(p_1)$.

$U(p_1) = \{\vec{u} \in U | p_1^{m_1}(\mathcal{A}_U)(\vec{u}) = \vec{0}\}$

$V(p_1) = \{\vec{v} \in V | p_1^{m_1}(\mathcal{A})(\vec{v}) = \vec{0}\}$

由定义可知, $U(p_1) \subset V(p_1)$

设 $\vec{v} \in V(p_1)$

$\because V = U \oplus V(p_s) \quad \therefore \exists! \vec{u} \in U, \overrightarrow{v_s} \in V(p_s), \vec{v} = \vec{u} + \overrightarrow{v_s} \quad [**]$,

$q(\mathcal{A})(\vec{v}) = q(\mathcal{A})(\vec{u}) + q(\mathcal{A})(\overrightarrow{v_s}) = q(\mathcal{A})(\vec{u})$

$p_1^{m_1}(\mathcal{A}) \circ q(\mathcal{A})(\vec{v}) = p_1^{m_1}(\mathcal{A}) \circ q(\mathcal{A})(\vec{u})$

$q(\mathcal{A}) \circ p_1^{m_1}(\mathcal{A})(\vec{u}) = q(\mathcal{A}) \circ p_1^{m_1}(\mathcal{A})(\vec{v}) = \vec{0} \quad [v \in V(p_1)]$

$\because p_1^{m_1}(\mathcal{A})(\vec{u}) \in U$且 $q(\mathcal{A})\big|_U$可逆

$\therefore p_1^{m_1}(\mathcal{A})(\vec{u}) = \vec{0} \Rightarrow \vec{u} \in U(p_1)$

$\therefore \vec{u} \in V(p_1)$, 由$[**]$, $\overrightarrow{v_s} \in V(p_1)$

$\because \gcd(p_1^{m_1}, p_s^{m_s}) = 1 \quad \therefore \exists f, g \in F[t]$, 使得 $f p_1^{m_1} + g p_s^{m_s} = 1$

$\Rightarrow f(\mathcal{A}) p_1^{m_1}(\mathcal{A}) + g(\mathcal{A}) p_s^{m_s}(\mathcal{A}) = \mathcal{E}$

$f(\mathcal{A}) p_1^{m_1}(\mathcal{A})(\overrightarrow{v_s}) + g(\mathcal{A}) p_s^{m_s}(\mathcal{A})(\overrightarrow{v_s}) = \overrightarrow{v_s}$

$\because \overrightarrow{v_s} \in V(p_1) \cap V(p_s) \quad \therefore \overrightarrow{v_s} = 0$ [证明见下]

$\Rightarrow \vec{v} = \vec{u}$

$\therefore \vec{v} \in U(p_1) \Rightarrow V(p_1) = U(p_1)$

于是 $V(p_i) = U(p_i), i = 1, \dots, s$

$\Rightarrow V = V(p_1) \oplus \cdots \oplus V(p_{s-1}) \oplus V(p_s)$

令 $\mathcal{A}_i=\mathcal{A}\big|_{V(p_i)}, i=1,\dots,s$

$\mathcal{A}_j$是$\mathcal{A}_U$限制在 $V(p_j)$上, $j=1,\dots,s-1$

于是 $\mu_{\mathcal{A}_j}=p_j^{m_j}(t), j=1,\dots,s-1$

$\left[\mathcal{A}_U\text{限制下 } U(p_i) \text{ 上的极小多项式是 } p_i^{m_i}(t)\right]$

且 p_s在 $V(p_1)\oplus\cdots\oplus V(p_{s-1})$上可逆

适当调整下标后，可得

$\forall k\in\{1,\dots,s\}$,

$p_k(\mathcal{A})$在 $V(p_1)\oplus\cdots\oplus V(p_{k-1})\oplus V(p_{k+1})\oplus\cdots\oplus V(p_s)$上可逆 ■

【例 6.2.1】不同广义特征子空间交零

在定理 6.1 中，$\overrightarrow{v_s}\in V(p_1)\cap V(p_s)$, 补证 $\overrightarrow{v_s}=0$

证：$\because 1\neq s\quad \therefore \gcd(p_1,p_s)=1\quad \therefore \gcd\left(p_1^{m_1},p_s^{m_s}\right)=1$

$\therefore \exists a,b\in F[t], a(t)p_1^{m_1}(t)+b(t)p_s^{m_s}(t)=1$

$\Rightarrow a(\mathcal{A})\circ p_1^{m_1}(\mathcal{A})+b(\mathcal{A})\circ p_s^{m_s}(\mathcal{A})=\mathcal{E}$

$\Rightarrow a(\mathcal{A})\circ p_1^{m_1}(\mathcal{A})(\overrightarrow{v_s})+b(\mathcal{A})\circ p_s^{m_s}(\mathcal{A})(\overrightarrow{v_s})=\overrightarrow{v_s}$

$\because \overrightarrow{v_s}\in V(p_1)\quad \therefore p_1^{m_1}(\mathcal{A})(\overrightarrow{v_s})=\vec{0}$, 同理$p_s^{m_s}(\mathcal{A})(\overrightarrow{v_s})=\vec{0}$

$\therefore \overrightarrow{v_s}=\vec{0}$ ■

注：两个不同特征的广义特征子空间的交只有零向量

【推论 6.1】可对角化的判定 3

设 $\mathcal{A}\in\mathcal{L}(V)$则

$\mathcal{A}$ 可对角化 $\Leftrightarrow \mu_{\mathcal{A}}(t)=(t-\alpha_1)\cdots(t-\alpha_s)$

其中 $\alpha_1,\dots,\alpha_s\in F$, 两两不同

证：$\Rightarrow$ 设$\overrightarrow{e_1},\dots,\overrightarrow{e_n}$是$V$的一组基，且$\mathcal{A}$在$\overrightarrow{e_1},\dots,\overrightarrow{e_n}$下的矩阵是

$A=\operatorname{diag}(\lambda_1,\dots,\lambda_n)$

$\mu_{\mathcal{A}}=\operatorname{lcm}(t-\lambda_1,t-\lambda_2,\dots,t-\lambda_n)=(t-\alpha_1)\cdots(t-\alpha_s)$

其中$\alpha_1,\dots,\alpha_s$是$\lambda_1,\dots,\lambda_n$中互不相同的元素

$\Leftarrow$: 由定理 6.1

$V=V(t-\alpha_1)\oplus\cdots\oplus V(t-\alpha_s)$

且$\mathcal{A}_i\big|_{V(t-\alpha_i)}$的极小多项式是$t-\alpha_i, i=1,\dots,s$

即$\forall i=1,\dots,s,\qquad \mathcal{A}_i-\alpha_i\mathcal{E}_i=\mathcal{O}_i$

其中$\mathcal{E}_i$是$V(t-\alpha_i)$上的恒同算子,$\mathcal{O}_i$是$V(t-\alpha_i)$上的零算子

令$\overrightarrow{\varepsilon_{i1}},\dots,\overrightarrow{\varepsilon_{id_i}}$是$V(t-\alpha_i)$的一组基，则$\mathcal{A}_i$在该基下的矩阵为$\alpha_i E_{d_i}$

于是在V的基底$\overrightarrow{\varepsilon_1},\dots,\overrightarrow{\varepsilon_{1d_1}},\dots,\overrightarrow{\varepsilon_{s1}},\dots,\overrightarrow{\varepsilon_{sd_s}}$下$\mathcal{A}$的矩阵为

对角矩阵$\operatorname{diag}\left(\alpha_1E_{d_1},\dots,\alpha_sE_{d_s}\right)$ ■

【推论 6.2】推论 6.1 的矩阵版

设$A\in M_n(F)$,则A可对角化$\Leftrightarrow \mu_A=(t-\alpha_1)\cdots(t-\alpha_s)$

其中$\alpha_1,\dots,\alpha_s\in F$两两不同

证：把A看成线性算子，然后用推论 6.1 ■

【例 6.2.2】幂等算子可对角化

设$\mathcal{A}\in\mathcal{L}(V)$,且$\mathcal{A}^2=\mathcal{A}$,证明$\mathcal{A}$可对角化

证：设$p(t)=t^2-t=t(t-1),p(\mathcal{A})=0$

$\mu_{\mathcal{A}}$只能为t或$t-1$或$t(t-1)$

由推论 6.1,$\mathcal{A}$可对角化 ■

【例 6.2.3】可对角化判定例

设 $A \in M_n(F)$ 满足 $A^2 = E$, 讨论A是否能相似于某个对角矩阵

解：设 $p = t^2 - 1 \in F[t], p(A) = A^2 - E = O_{n\times n}$

$\Rightarrow p(t)$零化 $A \Rightarrow \mu_A \big| p(t) = (t+1)(t-1)$

若$\mu_A(t) = t \pm 1$ 则 $A = \mp E$ 可对角化

若$\mu_A(t) = (t+1)(t-1)$且 $1 \neq -1$ 则可对角化

当 $\operatorname{char} F = 2$ 时，$\mu_A = (t+1)^2 \Rightarrow A$不能对角化

例如 $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{Z}_2)$不可对角化

【例 6.2.4】求广义特征子空间分解例

$$\mathcal{A}: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

求 $\mathbb{R}^3$ 关于 $\mathcal{A}$ 的广义特征子空间分解

解：$\mu_A(t) = t^3 - 4t^2 + 5t - 2 = (t-2)(t-1)^2$

$V(p-2) = \ker(\mathcal{A} - 2\mathcal{E})$

为$(A - 2E)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$的解空间 $\quad \therefore V(p-2) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$

$V((p-1)^2) = \ker((\mathcal{A} - \mathcal{E})^2)$

为$(A - E)^2\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$的解空间 $\quad \therefore V((p-1)^2) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$

$$\therefore \mathbb{R}^3 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \oplus \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$\mathcal{A}$在$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$下的矩阵为 $\begin{pmatrix} \boxed{2} & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{\begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix}} \end{pmatrix}$

§6.3 循环子空间的分解

循环子空间的基本性质[命题 5.3]

$(i)F[\mathcal{A}]\cdot\vec{v}$ 是 $\mathcal{A}-$子空间

(ii)如果 $d=\dim F[\mathcal{A}]\cdot\vec{v}$

则 $\vec{v},\mathcal{A}(\vec{v}),\dots,\mathcal{A}^{d-1}(\vec{v})$ 是 $F[\mathcal{A}]\cdot\vec{v}$ 的一组基

(iii)如果 $\vec{v},\mathcal{A}(\vec{v}),\dots,\mathcal{A}^{d-1}(\vec{v})$线性无关;$\vec{v},\mathcal{A}(\vec{v}),\dots,\mathcal{A}^{d}(\vec{v})$线性相关

则 $\dim F[\mathcal{A}]\cdot\vec{v}=d$

$(iv)F[\mathcal{A}]\cdot\vec{v}=\{p(\mathcal{A})(\vec{v})|p\in F[t]\}$

【定理 6.2】循环子空间分解

设 $\mathcal{A}\in\mathcal{L}(V)$, 则 $\exists\vec{v}_1,\dots,\overrightarrow{v_k}\in V$

使得 $V=F[\mathcal{A}]\cdot\overrightarrow{v_1}\oplus\cdots\oplus F[\mathcal{A}]\cdot\overrightarrow{v_k}$

证：设 $n=\dim V$ 对 n 归纳

当$n=1$ 时　令 $\vec{v}\in V\setminus\{\vec{0}\}$ 则 $F[\mathcal{A}]\cdot\vec{v}=V$, 定理成立

设$n>1$ 且当 $\dim V<n$ 时定理成立

如果 V 本身是 $\mathcal{A}-$循环的，则定理成立

考虑V 不是$\mathcal{A}-$循环的情况

令 m 是 V 中所有 $\mathcal{A}-$循环子空间的维数的最大值

$\exists\vec{w}\in V,\dim F[\mathcal{A}]\cdot\vec{w}=m,\ 1\le m<n$

证明思路：构造 $\mathcal{A}-$子空间 U 使得 $V=F[\mathcal{A}]\cdot\vec{w}\oplus U$

然后对 $\mathcal{A}\big|_U,U$用归纳假设

由命题 5.3,$\vec{w},\mathcal{A}(\vec{w}),\dots,\mathcal{A}^{m-1}(\vec{w})$是 $F[\mathcal{A}]\cdot\vec{w}$的一组基

扩充为 V 的一组基 $\vec{w},\mathcal{A}(\vec{w}),\dots,\mathcal{A}^{m-1}(\vec{w}),\overrightarrow{\varepsilon_{m+1}},\dots,\overrightarrow{\varepsilon_n}$

由第一章定理 8.1[也见该定理后的例子]

$\exists f \in V^*$,使得 $f(\vec{w}) = f\big(\mathcal{A}(\vec{w})\big) = \cdots = f\big(\mathcal{A}^{m-2}(\vec{w})\big) = 0$

$f\big(\mathcal{A}^{m-1}(\vec{w})\big) = 1, f\big(\overrightarrow{\mathcal{E}_j}\big) = \vec{0}, j = m+1, \dots, n$

注：$m = 1$ 时 $f(\vec{w}) = 1, f\big(\overrightarrow{\mathcal{E}_j}\big) = 0, j = 2, \dots, n$

定义 $\varphi: V \to F^m, \vec{x} \mapsto \begin{pmatrix} f(\vec{x}) \\ f\big(\mathcal{A}(\vec{x})\big) \\ \vdots \\ f\big(\mathcal{A}^{m-1}(\vec{x})\big) \end{pmatrix}$

$\because \mathcal{A}^i \in \mathcal{L}(V), f \in V^* \Rightarrow f \circ \mathcal{A}^i \in V^* \Rightarrow \varphi \in \mathrm{Hom}(V, F^m)$

断言 1　φ在基底 $\vec{w}, \mathcal{A}(\vec{w}), \dots, \mathcal{A}^{m-1}(\vec{w}), \overrightarrow{\mathcal{E}_{m+1}}, \dots, \overrightarrow{\mathcal{E}_n}$下的矩阵

$A = (B \quad C)_{m\times n}$,其中 $B \in GL_m(F), C \in F^{m\times(n-m)}$

断言 1 的证明：$\forall i \in \{0,1,\dots,m-1\}$

$$\varphi\left(\mathcal{A}^i(\vec{w})\right) = \begin{pmatrix} f\left(\mathcal{A}^i(\vec{w})\right) \\ \vdots \\ f\big(\mathcal{A}^{m-2}(\vec{w})\big) \\ f\big(\mathcal{A}^{m-1}(\vec{w})\big) \quad [m-i\text{行}] \\ f\big(\mathcal{A}^{m}(\vec{w})\big) \\ \vdots \\ f\left(\mathcal{A}^{i+m-1}(\vec{w})\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \quad [m-i\text{行}] \\ X \\ \vdots \\ X \end{pmatrix}$$

X表示任意值且不一定互相相同

$$\Big(\varphi(\vec{w}), \varphi\big(\mathcal{A}(\vec{w})\big), \dots, \varphi\big(\mathcal{A}^{m-1}(\vec{w})\big), \varphi\big(\overrightarrow{\mathcal{E}_{m+1}}\big), \dots, \varphi\big(\overrightarrow{\mathcal{E}_n}\big)\Big)$$

$$= \underbrace{(\overrightarrow{e_1}, \dots, \overrightarrow{e_m})}_{F^m\text{的标准基}} \left(\begin{array}{c|c} \underbrace{\begin{matrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & X \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 1 & \cdots & X & X \\ 1 & X & \cdots & X & X \end{matrix}}_{B} & \underbrace{\begin{matrix} X & \cdots & X \\ X & \cdots & X \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ X & \cdots & X \\ X & \cdots & X \end{matrix}}_{C} \end{array}\right)$$

$\Rightarrow B \in GL_m(F), C \in F^{m\times(n-m)}$ 断言 1 成立

断言 2　$\ker\varphi$ 是 $n-m$ 维 $\mathcal{A}-$ 子空间

断言 2 的证明：由线性映射维数公式

$\dim\ker\varphi+\operatorname{rank}\varphi=n$, 由断言 1

$\operatorname{rank}\varphi=m\Rightarrow\dim\ker\varphi=n-m$

设 $\vec{x}\in\ker\varphi$,

$$\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}=\varphi(\vec{x})=\begin{pmatrix}f(\vec{x})\\ \vdots\\ f\left(\mathcal{A}^{m-2}(\vec{x})\right)\\ f\left(\mathcal{A}^{m-1}(\vec{x})\right)\end{pmatrix}\Rightarrow f\left(\mathcal{A}^{i}(\vec{x})\right)=0, i=0,\dots,m-1$$

由m选择可知,$\exists k\le m$, 使得 $\vec{x},\mathcal{A}(\vec{x}),\dots,\mathcal{A}^{k-1}(\vec{x})$是 $F[\mathcal{A}]\cdot\vec{x}$的一组基

于是$\exists\ \alpha_0,\alpha_1,\dots,\alpha_{k-1}\in F$

$$\mathcal{A}^m(\vec{x})=\alpha_0(\vec{x})+\alpha_1\mathcal{A}(\vec{x})+\cdots+\alpha_{k-1}\mathcal{A}^{k-1}(\vec{x})\quad[*]$$

$$\varphi\left(\mathcal{A}(\vec{x})\right)=\begin{pmatrix}f\left(\mathcal{A}(\vec{x})\right)\\ \vdots\\ f\left(\mathcal{A}^{m-1}(\vec{x})\right)\\ f\left(\mathcal{A}^{m}(\vec{x})\right)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 0\\ f\left(\mathcal{A}^{m}(\vec{x})\right)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 0\\ 0\end{pmatrix}\ \left[\text{由}[*]\right]$$

$\Rightarrow\mathcal{A}(\vec{x})\in\ker\varphi$　断言 2 成立

断言 3 $V=F[\mathcal{A}]\cdot\vec{w}\oplus\ker\varphi$

断言 3 的证明：设 $\vec{u}\in F[\mathcal{A}]\cdot\vec{w}\cap\ker\varphi$

$\because\vec{u}\in F[\mathcal{A}]\cdot\vec{w}\ \therefore\exists\beta_0,\beta_1,\dots,\beta_{m-1}\in F$ 使得

$$\vec{u}=\beta_0\vec{w}+\beta_1\mathcal{A}(\vec{w})+\cdots+\beta_{m-1}\left(\mathcal{A}^{m-1}(\vec{w})\right)$$

于是 $\vec{u}$在 $\vec{w},\dots,\mathcal{A}^{m-1}(\vec{w}),\overrightarrow{\mathcal{E}_m},\dots,\overrightarrow{\mathcal{E}_n}$下的矩阵是

$$\begin{pmatrix}\beta_0\\ \vdots\\ \beta_{m-1}\\ \left.\begin{matrix}0\\ \vdots\\ 0\end{matrix}\right\}n-m\text{行}\end{pmatrix}$$

$\because \vec{u} \in \ker\varphi$，$\therefore \varphi(\vec{u}) = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ 而 $\varphi(\vec{u}) = (B \quad C)\begin{pmatrix} \beta_0 \\ \vdots \\ \beta_{m-1} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = B\begin{pmatrix} \beta_0 \\ \vdots \\ \beta_{m-1} \end{pmatrix}$

$\because B$可逆 $\therefore \beta_0 = \cdots = \beta_{m-1} = 0 \Rightarrow \vec{u} = 0$

于是 $F[\mathcal{A}] \cdot \vec{w} + \ker\varphi$ 是直和

$\dim(F[\mathcal{A}] \cdot \vec{w}) + \dim\ker\varphi = m + n - m = n$

$\Rightarrow$ 断言 3 成立

令 $W = F[\mathcal{A}] \cdot \vec{w}, K = \ker\varphi$

由断言 3 $V = W \oplus K$

由 m 的选取, $0 < \dim W < n \Rightarrow 0 < \dim k < n$

由断言 2 K是 $\mathcal{A}-$子空间

对 $\mathcal{A}\big|_K$和 K用归纳假设

得K是若干个K中 $\mathcal{A}\big|_K$循环子空间的直和

而它们也都是 $\mathcal{A}-$循环的 ■

【推论 6.3】C-H 定理加强版

设 $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$,

$(i)\mu_{\mathcal{A}} \big| \mathcal{X}_{\mathcal{A}}$

(ii)设 p 是 $\mathcal{X}_{\mathcal{A}}$ 在 $F[t]$中的一个不可约因子，则 $p \big| \mu_{\mathcal{A}}$

证：由定理 6.2, $V = U_1 \oplus \cdots \oplus U_k$, 其中 $U_1, \dots, U_k$是非零$\mathcal{A}-$循环的

令 $\mathcal{A}_i = \mathcal{A}\big|_{U_i}, i = 1, \dots, k$

则$\mu_{\mathcal{A}} = \operatorname{lcm}(\mu_{\mathcal{A}_1}, \dots, \mu_{\mathcal{A}_k}) \qquad \mathcal{X}_{\mathcal{A}} = \mathcal{X}_{\mathcal{A}_1} \cdots \mathcal{X}_{\mathcal{A}_k}$

由引理 5.4, 则 $\mathcal{X}_{\mathcal{A}_i} = \mu_{\mathcal{A}_i}, i = 1, \dots, k$

$\therefore \mu_{\mathcal{A}} \mid \mathcal{X}_{\mathcal{A}}$ (i)成立

$(ii) p$不可约且 $p \mid \mathcal{X}_{\mathcal{A}} \Rightarrow \exists i \in \{1, \dots, k\}, p \mid \mathcal{X}_{\mathcal{A}_i}$

由$(i), p \mid \mu_{\mathcal{A}_i} \Rightarrow p \mid \mu_{\mathcal{A}}$ ■

注: 由此, $\mu_{\mathcal{A}} = p_1^{m_1} \cdots p_s^{m_s}$ (不可约分解)

$\mathcal{X}_{\mathcal{A}} = p_1^{n_1} \cdots p_s^{n_s}$ 且 $0 < m_i \leq n_i, i = 1, \dots, s$

【推论 6.4】可对角化判定 4

设 $F = \mathbb{C}, \mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$

则 $(i)\mathcal{X}_{\mathcal{A}}$ 和 $\mu_{\mathcal{A}}$有相同的根(不计重数)

(ii) $\mathcal{A}$ 可对角化 $\Leftrightarrow \gcd(\mu_{\mathcal{A}}, \mu'_{\mathcal{A}}) = 1$

证: 由代数学基本定理和推论 6.3

$\mu_{\mathcal{A}} = (t - \lambda_1)^{m_1} \cdots (t - \lambda_s)^{m_s}$

其中 $\lambda_1, \dots, \lambda_s \in \mathbb{C}$ 两两不同, $m_1, \dots, m_s \in \mathbb{Z}^+$

$\mathcal{X}_{\mathcal{A}} = (t - \lambda_1)^{n_1} \cdots (t - \lambda_s)^{n_s}, m_i \leq n_i, i = 1, \dots, s$ $\therefore (i)$成立

由推论 6.2，$\mathcal{A}$可对角化 $\Leftrightarrow m_1 = \cdots = m_s = 1$

$\Leftrightarrow \gcd(\mu_{\mathcal{A}}, \mu'_{\mathcal{A}}) = 1$ ■

【例 6.3.1】可对角化判定例 2

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{pmatrix} \in M_4(\mathbb{C})$$ 问 A是否可对角化

解：$\mu_{\mathcal{A}} = t^4 - 18t^3 - 24t^2 + 64t + 512$

$\gcd(\mu_{\mathcal{A}}, \mu'_{\mathcal{A}}) = 1$ 故可对角化

§6.4 根子空间分解

【定义 6.4.1】根子空间

设 $F=\mathbb{C},\mathcal{A}\in\mathcal{L}(V),\lambda\in\operatorname{spec}_{\mathbb{C}}\mathcal{A}$

$\mathcal{A}$ 关于 λ 的根子空间是 $V(\lambda)=\left\{\vec{v}\in V\middle|\exists k\in\mathbb{N},(\mathcal{A}-\lambda\mathcal{E})^k(\vec{v})=\vec{0}\right\}$

【引理 6.4】根子空间等于广义特征子空间

利用上述记号，则 $(t-\lambda)\big|\mu_{\mathcal{A}}$ 且 $V(t-\lambda)=V(\lambda)$

注：$V(t-\lambda)$ 是广义特征子空间

证：由推论 6.3 $(t-\lambda)\big|\mu_{\mathcal{A}}$, 于是 $V(t-\lambda)$有意义

设 $(t-\lambda)$在 $\mu_{\mathcal{A}}$ 中的重数是 m

则 $V(t-\lambda)=\ker((\mathcal{A}-\lambda\mathcal{E})^m)=\left\{\vec{v}\in V\middle|(\mathcal{A}-\lambda\mathcal{E})^m(\vec{v})=\vec{0}\right\}$

由此 $V(t-\lambda)\subset V(\lambda)$

反之 设 $\vec{v}\in V(\lambda),\exists k\in\mathbb{N}$ 使得$(\mathcal{A}-\lambda\mathcal{E})^k(\vec{v})=\vec{0}$

设 $\mu_{\mathcal{A}}=(t-\lambda)^m q(t)$ 其中 $q\in\mathbb{C}[t]$且 $\gcd(t-\lambda,q)=1$

从而 $\gcd((t-\lambda)^k,q)=1$

$\exists a,b\in F[t],a(t)(t-\lambda)^k+b(t)q(t)=1$

$a(\mathcal{A})(\mathcal{A}-\lambda\mathcal{E})^k(\vec{v})+b(\mathcal{A})q(\mathcal{A})(\vec{v})=\mathcal{E}\vec{v}=\vec{v}$

$\therefore b(\mathcal{A})q(\mathcal{A})(\vec{v})=\vec{v}$

$(\mathcal{A}-\lambda\mathcal{E})^m(\vec{v})=(\mathcal{A}-\lambda\mathcal{E})^m b(\mathcal{A})q(\mathcal{A})(\vec{v})$

$=b(\mathcal{A})(\mathcal{A}-\lambda\mathcal{E})^m q(\mathcal{A})(\vec{v})$

$=b(\mathcal{A})\underbrace{\mu_{\mathcal{A}}(\mathcal{A})}_{\mathcal{O}}(\vec{v})=\vec{0}\Rightarrow\vec{v}\in V(t-\lambda)$

$\therefore V(\lambda)\subset V(t-\lambda)\quad\therefore V(\lambda)=V(t-\lambda)\qquad\blacksquare$

注：由上述引理和定理 6.1 可直接得到柯书中根子空间的分解定理(P72.3)

§6.5 循环子空间的进一步性质

【例 6.5.1】无视极小多项式向量存在性

P56 习题 9(ii)

设 $\mathcal{A}\in\mathcal{L}(V)$ 则 $\exists\vec{v}\in V$, 使得 $\mu_{\mathcal{A},\vec{v}}=\mu_{\mathcal{A}}$

证：$\mu_{\mathcal{A}}(\mathcal{A})=\mathcal{O}: V\to V$, 则 $\forall\vec{v}\in V, \mu_{\mathcal{A}}(\mathcal{A})(\vec{v})=\vec{0}$

于是 $\mu_{\mathcal{A},\vec{v}}\,\big|\,\mu_{\mathcal{A}}$

下证 $\exists\vec{v}$, 使得 $\deg\mu_{\mathcal{A},\vec{v}}=\deg\mu_{\mathcal{A}}$

记 $\mu_{\mathcal{A}}=p_1^{m_1}\cdots p_s^{m_s}$

若 $s=1$, 　　则 $\mu_{\mathcal{A}}=p^m, p=p_1, m=m_1, p\in F[t]\setminus F$

假设 $\forall\vec{v}\in V, \deg\mu_{\mathcal{A},\vec{v}}<\deg\mu_{\mathcal{A}}\Rightarrow\deg\mu_{\mathcal{A},\vec{v}}\,\big|\,p^{m-1}$

于是 $p^{m-1}(\mathcal{A})(\vec{v})=\vec{0}\Rightarrow p^{m-1}(\mathcal{A})=\mathcal{O}\Rightarrow p^{m-1}$为 $\mathcal{A}$ 的零化多项式

与$\mu_{\mathcal{A}}=p^m$ 极小矛盾, 故$\exists\vec{v}\in V, \deg\mu_{\mathcal{A},\vec{v}}=\deg\mu_{\mathcal{A}}$

若 $s>1$ 考虑广义特征子空间分解

$V=V(p_1)\oplus\cdots\oplus V(p_s), V(p_i)=\ker\left(p_i^{m_i}(\mathcal{A})\right)$

令 $\mathcal{A}_i=\mathcal{A}\big|_{V(p_i)}$则 $\mu_{\mathcal{A}_i}=p_i^{m_i}$

此时, 用$s=1$ 的结果, 存在$\overrightarrow{v_i}\in V(p_i), s.t. \mu_{\mathcal{A}_i,\overrightarrow{v_i}}=\mu_{\mathcal{A}_i}=p_i^{m_i}$

令 $\vec{v}=\overrightarrow{v_1}+\cdots+\overrightarrow{v_s}$, 　　$\overrightarrow{v_1},\dots,\overrightarrow{v_s}$由上述过程得到

则 $\vec{0}=\mu_{\mathcal{A},\vec{v}}(\mathcal{A})(\vec{v})=\mu_{\mathcal{A},\vec{v}}(\mathcal{A})(\overrightarrow{v_1})+\cdots+\mu_{\mathcal{A},\vec{v}}(\mathcal{A})(\overrightarrow{v_s})$

注意，$V(p_i)$为$\mathcal{A}$不变子空间,

则对 $\forall f\in F[t], V(p_i)$为$f(\mathcal{A})$不变子空间

则 $\mu_{\mathcal{A},\vec{v}}(\mathcal{A})\overrightarrow{v_i}\in V(p_i)$

于是由$V=V(p_1)\oplus\cdots\oplus V(p_s)$和$\mu_{\mathcal{A},\vec{v}}(\mathcal{A})\overrightarrow{v_i}=\vec{0}, i=1,\dots,s$

则 $\mu_{\mathcal{A}_i,\overrightarrow{v_i}}\,\big|\,\mu_{\mathcal{A},\vec{v}}, i=1,\dots,s$

此时 $\mu_{\mathcal{A}_i,\vec{v_i}}=\mu_{\mathcal{A}_i}$ 则$\mu_{\mathcal{A}_i}\,\big|\,\mu_{\mathcal{A},\vec{v}}$

$\Rightarrow \mu_{\mathcal{A}}=\operatorname{lcm}(\mu_{\mathcal{A}_1},\dots,\mu_{\mathcal{A}_s})\,\big|\,\mu_{\mathcal{A},\vec{v}}$

$\Rightarrow \mu_{\mathcal{A}}=\mu_{\mathcal{A},\vec{v}}$ ■

【命题 6.1】循环空间维数等于极小多项式次数

设 $\mathcal{A}\in\mathcal{L}(V)$, 则 V是 $\mathcal{A}-$循环的 $\Leftrightarrow \deg\mu_{\mathcal{A}}=\dim V$

证： $\Rightarrow$: 由引理 5.4, $\mu_{\mathcal{A}}=\mathcal{X}_{\mathcal{A}}\Rightarrow\deg\mu_{\mathcal{A}}=\deg\mathcal{X}_{\mathcal{A}}=\dim V$

$\Leftarrow$: 设 $n=\dim V$, 且 $\deg\mu_{\mathcal{A}}=n$

由例 6.5.1

$\exists\vec{v}\in V, s.t.\ \mu_{\mathcal{A},\vec{v}}=\mu_{\mathcal{A}}\Rightarrow\deg\mu_{\mathcal{A},\vec{v}}=n=\dim V$

由命题 5.4 $\Rightarrow\dim F[\mathcal{A}]\cdot\vec{v}=\dim V\Rightarrow F[\mathcal{A}]\cdot\vec{v}=V$ ■

【例 6.5.2】求循环向量例

$$\mathcal{A}:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3,\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}\mapsto\underbrace{\begin{pmatrix}1&0&1\\1&1&-1\\0&0&2\end{pmatrix}}_{A}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$$

证明 $\mathbb{R}^3$是$\mathcal{A}-$循环的且求 $\vec{v}$ 使得 $\mathbb{R}^3=\mathbb{R}[\mathcal{A}]\cdot\vec{v}$

注：称 $\vec{v}$ 是 $\mathbb{R}^3$ 关于 $\mathcal{A}$ 循环向量

证： $\mu_{\mathcal{A}}=t^3-4t^2+5t-2$

$\deg\mu_{\mathcal{A}}=3\Rightarrow\mathbb{R}^3$是$\mathcal{A}-$循环的

设$\vec{v}=\begin{pmatrix}v_1\\v_2\\v_3\end{pmatrix}$是循环向量, 即$\vec{v},\mathcal{A}(\vec{v}),\mathcal{A}^2(\vec{v})$线性无关[命题 5.3]

即 $\operatorname{rank}\left(A^0\begin{pmatrix}v_1\\v_2\\v_3\end{pmatrix},A^1\begin{pmatrix}v_1\\v_2\\v_3\end{pmatrix},A^2\begin{pmatrix}v_1\\v_2\\v_3\end{pmatrix}\right)=3$

试验可得 $v_1=v_2=0, v_3=1$ 满足要求

因此$\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$是一个循环向量

【命题 6.2】线性算子在循环子空间的矩阵

设$\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$且$V$是$\mathcal{A}-$循环的

设$\mu_{\mathcal{A}} = t^n + \alpha_{n-1}t^{n-1} + \cdots + \alpha_0, \qquad \alpha_0, \dots, \alpha_{n-1} \in F$

设$\vec{v}, \mathcal{A}(\vec{v}), \dots, \mathcal{A}^{n-1}(\vec{v})$是$V$的一组基

则$\mathcal{A}$在该基下的矩阵为

$$\begin{pmatrix} 0 & & & & -\alpha_0 \\ 1 & 0 & & & -\alpha_1 \\ & 1 & \ddots & & -\alpha_2 \\ & & \ddots & 0 & -\alpha_{n-2} \\ & & & 1 & -\alpha_{n-1} \end{pmatrix}_{n\times n}$$

证：$i \in \{0,1,\dots,n-2\}, \mathcal{A}\left(\mathcal{A}^i(\vec{v})\right) = \mathcal{A}^{i+1}(\vec{v}) \quad [1]$

$\mathcal{A}\left(\mathcal{A}^{n-1}(\vec{v})\right) = \mathcal{A}^n(\vec{v}) = (-\alpha_{n-1}\mathcal{A}^{n-1} - \cdots - \alpha_1\mathcal{A} - \alpha_0\mathcal{E})(\vec{v})$

$= -\alpha_0\vec{v} - \alpha_1\mathcal{A}(\vec{v}) - \cdots - \alpha_{n-1}\mathcal{A}^{n-1}(\vec{v}) \ [2]$

由 [1][2]

$\left(\mathcal{A}(\vec{v}), \mathcal{A}^2(\vec{v}), \dots, \mathcal{A}^{n-1}(\vec{v}), \mathcal{A}^n(\vec{v})\right)$

$$= \left(\vec{v}, \mathcal{A}(\vec{v}), \dots, \mathcal{A}^{n-2}(\vec{v}), \mathcal{A}^{n-1}(\vec{v})\right)\begin{pmatrix} 0 & & & & -\alpha_0 \\ 1 & 0 & & & -\alpha_1 \\ & 1 & \ddots & & -\alpha_2 \\ & & \ddots & 0 & -\alpha_{n-2} \\ & & & 1 & -\alpha_{n-1} \end{pmatrix} \quad \blacksquare$$

由上述命题,例 6.5.2 中有

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \sim_s \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

§6.6 $\mathcal{A}$-不可分子空间

【定义 6.6.1】不可分子空间

设 $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V), U \subset V, U$是$\mathcal{A}-$子空间

如果 U 不能写成两个维数为正的$\mathcal{A}-$子空间的直和

则称U是 $\mathcal{A}-$不可分的 $(indecomposable)$

否则U 称为$\mathcal{A}-$可分的

【定理 6.3】不可分子空间分解

设$\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$,则 V是有限个 $\mathcal{A}-$不可分子空间的直和

证：设 $n = \dim V$, 对 n 归纳 $n = 1$ 时显然成立

设$n > 1$ 且 $\dim V < n$时定理成立

如果 V 是$\mathcal{A}-$不可分的，令 $U_1 = V$ 得证

如果 V 是$\mathcal{A}-$可分的，则 $V = U \oplus W$, 其中U, W 是 $\mathcal{A}-$子空间

且 $0 < \dim U < n, 0 < \dim W < n$

对 $U, \mathcal{A}\big|_U$和$W, \mathcal{A}\big|_W$用归纳假设即可 ■

【命题 6.3】不可分子空间性质

设 $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$,则 V 是 $\mathcal{A}-$不可分的 $\Leftrightarrow$

$(i)\mu_{\mathcal{A}}$ 是 F上某个不可约多项式的幂次

$(ii)V$是$\mathcal{A}-$循环的

证： $\Rightarrow$: 若$\mu_{\mathcal{A}}$不是某个不可约多项式的幂次

则 $\exists p, q \in F[t] \setminus F$, 使得 $\mu_{\mathcal{A}} = p^m q$ 且 $\gcd(p, q) = 1$

则 $\gcd(p^m, q) = 1$

$\mu_{\mathcal{A}} = p^m \underbrace{p_2^{m_2} \cdots p_s^{m_s}}_{q}\ (s > 1)$

由引理 6.3 V是$\mathcal{A}-$可分的，矛盾

若V不是$\mathcal{A}-$循环的

由定理 6.2,V是若干个$\mathcal{A}-$循环子空间的直和

$\therefore V$是$\mathcal{A}-$可分的，矛盾

$\Leftarrow$: 设$\mu_{\mathcal{A}} = p^m$, 其中 $p \in F[t]$不可约,$m \in \mathbb{Z}^+$

$\because V$ 是 $\mathcal{A}-$循环的

$\therefore \dim V = \deg \mu_{\mathcal{A}}$ 　 [命题 6.1]

设$V = U \oplus W$, 其中U, W是$\mathcal{A}-$子空间

设 $\mathcal{A}_U = \mathcal{A}|_U$ 则 $\mu_{\mathcal{A}_U} | \mu_{\mathcal{A}} \Rightarrow \mu_{\mathcal{A}_U} = p^k, 0 < k \leq m$

同理 $\mathcal{A}_W = \mathcal{A}|_W, \mu_{\mathcal{A}_W} = p^l, 0 < l \leq m$

$\mu_{\mathcal{A}} = \mathrm{lcm}(p^l, p^k) = p^{\max(k,l)} = p^m$, 不妨设 $k = m$

$\Rightarrow \mu_{\mathcal{A}_U} = p^m \Rightarrow \dim U \geq \deg p^m = \dim V \Rightarrow U = V \Rightarrow W = \{\vec{0}\}$

$\Rightarrow V$不可分 ■

【例 6.6.1】不可分子空间例

$\mathcal{A}$ 如例 6.5.2,$\mu_{\mathcal{A}} = (t-2)(t-1)^2 \Rightarrow \mathbb{R}^3$是$\mathcal{A}-$可分的

$\mathbb{R}^3 = V(t-2) \oplus V((t-1)^2)$

$\mathcal{A}|_{V(t-2)}$的极小多项式是$t-2$

$\mathcal{A}|_{V(t-1)^2}$的极小多项式是$(t-1)^2$

再由 $\dim V(t-2) = 1, \dim V((t-1)^2) = 2$

可知$V(t-2)$和 $V((t-1)^2)$都是$\mathcal{A}-$不可分的

【定理 6.4】不可分循环子空间分解

$\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$, 则 $V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_l$,

其中 V_i既是 $\mathcal{A} -$ 不可分的，也是$\mathcal{A} -$ 循环的

特别地，$\mathcal{A}\big|_{V_i}$的极小多项式是$F[t]$中某个不可约多项式的幂次

证：定理 6.3 和命题 6.2 的直接推论

【命题 6.4】复 Jordan 块存在性

设 $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V), F = \mathbb{C}, V$是$\mathcal{A} -$ 不可分的

则 $\mathcal{A}$ 在 V 的某组基下的矩阵是 $\begin{pmatrix} \lambda & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda \end{pmatrix}_{n\times n}$ $, \lambda \in \mathbb{C}$

记为 $J_n(\lambda)$ 称为 n 阶关于 λ的$Jordan$块

例:$J_2(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}, J_3(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$

证：由命题 6.3 和代数学基本定理,$\mu_{\mathcal{A}} = (t-\lambda)^n$,其中 $n = \dim V$,

且 $\exists \vec{v} \in V, V = F[\mathcal{A}] \cdot \vec{v}$

令 $\overrightarrow{e_i} = (\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})^{n-i}(\vec{v}), \qquad i = 1, \dots, n$

先验证 $\overrightarrow{e_1}, \dots, \overrightarrow{e_n}$ 是基

设 $\alpha_1\overrightarrow{e_1} + \cdots + \alpha_n\overrightarrow{e_n} = \vec{0}, \qquad \alpha_i \in F$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} \alpha_i (\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})^{n-i}(\vec{v}) = \vec{0}$$

令$f(t) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i (t-\lambda)^{n-i} \in \mathbb{C}[t]$

即$f(\mathcal{A}(\vec{v})) = \vec{0}$

$\Rightarrow \forall j \in \{0,1,\dots,n-1\}, f(\mathcal{A})\left(\mathcal{A}^j(\vec{v})\right) = \vec{0}$

$\Rightarrow f(\mathcal{A}) = \mathcal{O}\ [\because \vec{v}, \mathcal{A}(\vec{v}), \dots, \mathcal{A}^{n-1}(\vec{v})$是$V$的基$]$

$\Rightarrow \mu_{\mathcal{A}} \big| f$, 但$\deg f \leq n-1$

$\Rightarrow f \equiv 0 \Rightarrow \alpha_0 = \alpha_1 = \cdots = \alpha_{n-1} = 0$

$\mathcal{A}(\overrightarrow{e_1}) = \mathcal{A}\big((\mathcal{A}-\lambda\mathcal{E})^{n-1}(\vec{v})\big) = (\mathcal{A}-\lambda\mathcal{E})^{n-1} \circ \mathcal{A}(\vec{v})$

$= (\mathcal{A}-\lambda\mathcal{E})^{n-1}(\mathcal{A}-\lambda\mathcal{E}+\lambda\mathcal{E})(\vec{v})$

$= (\mathcal{A}-\lambda\mathcal{E})^{n}(\vec{v}) + \lambda(\mathcal{A}-\lambda\mathcal{E})^{n-1}(\vec{v}) = \lambda\overrightarrow{e_1}$

$i > 1, \mathcal{A}(\overrightarrow{e_i}) = \mathcal{A} \circ (\mathcal{A}-\lambda\mathcal{E})^{n-i}(\vec{v}) = (\mathcal{A}-\lambda\mathcal{E})^{n-i}\mathcal{A}(\vec{v})$

$= (\mathcal{A}-\lambda\mathcal{E})^{n-i}(\mathcal{A}-\lambda\mathcal{E}+\lambda\mathcal{E})(\vec{v})$

$= (\mathcal{A}-\lambda\mathcal{E})^{n-(i-1)}(\vec{v}) + \lambda(\mathcal{A}-\lambda\mathcal{E})^{n-i}(\vec{v}) = \overrightarrow{e_{i-1}} + \lambda\overrightarrow{e_i}$

由此 $\left(\mathcal{A}(\overrightarrow{e_1}), \dots, \mathcal{A}(\overrightarrow{e_n})\right) = (\overrightarrow{e_1}, \dots, \overrightarrow{e_n})\underbrace{\begin{pmatrix} \lambda & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda \end{pmatrix}_{n\times n}}_{J_n(\lambda)}$ ■

§7 复矩阵的 Jordan 标准型（存在性）

【定理 7.1】复方阵可化为 Jordan 标准型

设$A \in M_n(\mathbb{C})$,则存在 $\lambda_1, \dots, \lambda_l \in \mathbb{C}$ (不必两两不同), $d_1, \dots, d_l \in \mathbb{Z}^+$

使得 $A \sim_s J_A = \operatorname{diag}\left(J_{d_1}(\lambda_1), \dots, J_{d_n}(\lambda_n)\right)$

证：设 $\mathcal{A}: \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n, \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mapsto A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, 则$\mathcal{A} \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$

由定理 6.4, $\mathbb{C}^n = V_1 \oplus \cdots \oplus V_l$, 其中$V_i$是$\mathcal{A}-$不可分的

令 $\mathcal{A}_i = \mathcal{A}\big|_{V_i}$

由命题 6.3, $\mu_{\mathcal{A}_i} = (t - \lambda_i)^{d_i}, i = 1, \dots, l, \lambda_i \in \mathbb{C}, d_i \in \mathbb{Z}^+$

由命题 6.1, $\dim V_i = d_i$ ($\because V_i$是$\mathcal{A}-$循环的)

由命题 6.4, V_i中存在一组基 $\overrightarrow{e_{\iota 1}}, \dots, \overrightarrow{e_{\iota d_\iota}}$

使得 $\mathcal{A}_i$在该基下的矩阵为 $J_{d_i}(\lambda_i)$

由上述直和分解, $\overrightarrow{e_{11}}, \dots, \overrightarrow{e_{1d_1}}, \dots, \overrightarrow{e_{l1}}, \dots, \overrightarrow{e_{ld_l}}$下$\mathcal{A}$的矩阵为

$\operatorname{diag}\left(J_{d_1}(\lambda_1), \dots, J_{d_n}(\lambda_n)\right) \coloneqq J_A$ [定理 3.2]

即 $A \sim_s J_A$ ■

注：1. 称证明中的J_A为A的一个$Jordan$标准型

2. $\lambda_1, \dots, \lambda_l$中互不相同的元素集合为 $\operatorname{spec}_{\mathbb{C}} A$

3. $\mathcal{X}_A = (t - \lambda_1)^{d_1} \cdots (t - \lambda_l)^{d_l}$

$\mu_{\mathcal{A}} = \operatorname{lcm}((t - \lambda_1)^{d_1}, \cdots, (t - \lambda_l)^{d_l})$

4. 如果$d_1 = \cdots = d_l = 1$, 则$J_A = \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_l)$, $l = n$

此时 A可对角化 逆命题也成立

【例 7.1.1】求复方阵 Jordan 标准型例

计算 $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}\in M_3(\mathbb{C})$的$Jordan$标准型

注：在第九节会依据相关定理简化求$Jordan$标准型的过程

解: 1. 计算 A 的极小多项式 $\mu_A=t^3-4t^2+5t-2$

2. 在 $\mathbb{C}$ 分解 $\mu_A=(t-2)(t-1)^2$

$\mathbb{C}^3=V(t-2)\oplus V(t-1)$ $\left[\text{把}A\text{看成}\mathbb{C}^3\text{上的算子}\right]$

$V(t-2)=\ker(\mathcal{A}-2\mathcal{E})$

$\operatorname{rank}(\mathcal{A}-2\mathcal{E})=\operatorname{rank}(A-2E)=\operatorname{rank}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 1 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}=2$

$\Rightarrow \dim V(t-2)=3-2=1\Rightarrow V(t-2)$是$\mathcal{A}-$不可分的

$\therefore \dim V(t-1)=2$

断言 $V(t-1)$是$\mathcal{A}-$不可分的

证：假如 $V(t-1)=W_1\oplus W_2$, 其中W_1,W_2是$\mathcal{A}-$子空间

且非 $\left\{\vec{0}\right\}$ 则 $\dim W_1=\dim W_2=1$

设 $W_1=\langle\overrightarrow{w_1}\rangle, W_2=\langle\overrightarrow{w_2}\rangle$

$V(t-1)=\langle\vec{v}\rangle$

$\mathbb{C}^3=\langle\vec{v}\rangle\oplus\langle\overrightarrow{w_1}\rangle\oplus\langle\overrightarrow{w_2}\rangle$

$\mathcal{A}(\vec{v})=\alpha_1\vec{v}, \mathcal{A}(\overrightarrow{w_1})=\beta_1\overrightarrow{w_1}, \mathcal{A}(\overrightarrow{w_2})=\beta_2\overrightarrow{w_2}$

于是 $\vec{v},\overrightarrow{w_1},\overrightarrow{w_2}$是$\mathbb{C}^3$中线性无关的 $\mathcal{A}$的特征向量

$\Rightarrow A$可对角化　　矛盾

于是 $V(t-1)$是 $\mathcal{A}-$不可分的

也可利用$\mathcal{A}\big|_{V(t-1)}$的极小多项式为$(t-1)^2$[定理 6.1]

再用命题 6.1 和 6.3

$\mathbb{C}^3 = V(t-2) \oplus V(t-1)$, $\quad \begin{array}{cc} 1 & 2 \\ (t-2) & (t-1)^2 \end{array}$

$$A \sim_s \begin{pmatrix} J_1(2) & \\ & J_2(1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boxed{2} & \\ & \boxed{\begin{matrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{matrix}} \end{pmatrix}$$

【例 7.1.2】求约当转换矩阵例

接上题,若需求 $T \in GL_3(\mathbb{C})$使得 $J_A = T^{-1}AT$

计算$V(t-2)$的循环向量 $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

依命题 6.4 的证明造$J_1(2)$的基 $\overrightarrow{e_{11}} = \vec{x}$ $\left[\overrightarrow{e_i} = (\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})^{n-i}(\vec{v})\right]$

计算$V(t-1)$的基,即 $\ker((\mathcal{A}-\mathcal{E})^2)$ 的基 $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

即求$V(t-1)$的一个循环向量

设$\vec{v} = \alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\vec{v}$是 $V(t-1)$的循环向量 $\Leftrightarrow \vec{v}, \mathcal{A}(\vec{v})$线性无关

$\Leftrightarrow (\vec{v}, \mathcal{A}\vec{v}) = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_1 \\ \alpha_2 & \alpha_1 + \alpha_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$的秩为 2

取 $\alpha_1 = 1, \alpha_2 = 0$ 即可,$\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

则$\overrightarrow{e_{21}} = (\mathcal{A} - \mathcal{E})(\vec{v}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \overrightarrow{e_{22}} = (\mathcal{A} - \mathcal{E})^0(\vec{v}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

则在 $\overrightarrow{e_{11}}, \overrightarrow{e_{21}}, \overrightarrow{e_{22}}$下 A的矩阵为 $J_A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$J_A = T^{-1}AT, \text{其中} T = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{\overrightarrow{e_{11}}\ \overrightarrow{e_{21}}\ \overrightarrow{e_{22}}}$$

【例 7.1.2】求复方阵 Jordan 标准型例 2

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -2 & -2 \end{pmatrix} \in M_4(\mathbb{C}) \text{求} J_A$$

解: $\mu_{\mathcal{A}} = t(t+1)^2$

由定理 6.1 $\mathbb{C}^4 = V(t) \oplus V(t+1) \quad V(t+1) = \ker((\mathcal{A}+\mathcal{E})^2)$

$\dim V(t) = \dim\ker\mathcal{A} = 4 - \operatorname{rank} A = 1, V(t)$是$\mathcal{A}-$不可分的

$\dim V(t+1) = 3, \mathcal{A}\big|_{V(t+1)}$的极小多项式是 $(t+1)^2$

由命题 6.1,6.3, $V(t+1)$是$\mathcal{A}-$可分的

$\left[\because \deg\mu_{\mathcal{A}|_{V(t+1)}} = 2 < 3 = \dim V(t+1)\right]$

情形 1　$V(t+1) = W_1 \oplus W_2 \oplus W_3$, 其中$W_1, W_2, W_3$是$\mathcal{A}-$子空间

且 $\dim W_1 = \dim W_2 = \dim W_3 = 1$

如上例分解 $\mathcal{A}$可对角化　　矛盾

情形 2　$V(t+1) = U_1 \oplus U_2$

其中 $\dim U_1 = 1, \dim U_2 = 2, U_1, U_2$是$\mathcal{A}-$不可分的

$\mathbb{C} = V(t) \oplus U_1 \oplus U_2$ 是$\mathcal{A}-$不可分分解

$$\begin{array}{llll} \dim & 1 & 1 & 2 \\ & t & t+1 & (t+1)^2 \end{array}$$

$J_A = \operatorname{diag}\big(J_1(0), J_1(-1), J_2(-1)\big)$

$$A \sim_s \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

§8 矩阵的准素有理规范型

【定义 8.1.1】广义 Jordan 块

设 F为任意域,V是F上n维线性空间

$\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$, 设 V是$\mathcal{A}-$不可分的

由命题 6.3, $\exists \vec{v}, V = F[\mathcal{A}] \cdot \vec{v}$,

$\mu_{\mathcal{A}} = p^m$, 其中$p \in F[t]$不可约, $m \in \mathbb{Z}^+$

设$d = \deg p$, 则 $n = dm$ $\left[\text{命题 6.1}\right]$

类似于命题 6.4 的证明可得 $\overrightarrow{e_{ij}} = p(\mathcal{A})^{m-i} \circ \mathcal{A}^{d-j}(\vec{v})$,

$i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, d$

$\overrightarrow{e_{ij}}$是 V的一组基, 在该基下 $\mathcal{A}$的矩阵记为 $J_n(p)$

称为关于 p 的 n阶广义$Jordan$块

【例 8.1.1】求准素有理规范型例

已知$V = \mathbb{R}^4, \mathcal{A} \in \mathcal{L}(V), \mu_{\mathcal{A}} = (t^2+1)^2$

设$\mathbb{R}^4 = \mathbb{R}[\mathcal{A}] \cdot \vec{v}$

$\overrightarrow{e_{11}} = (\mathcal{A}^2 + \mathcal{E})\mathcal{A}(\vec{v})$

$\overrightarrow{e_{12}} = (\mathcal{A}^2 + \mathcal{E})(\vec{v})$

$\overrightarrow{e_{21}} = \mathcal{A}(\vec{v})$

$\overrightarrow{e_{22}} = \vec{v}$

$\mathcal{A}(\overrightarrow{e_{11}}) = \mathcal{A}(\mathcal{A}^2 + \mathcal{E})\mathcal{A}(\vec{v}) = (\mathcal{A}^2 + \mathcal{E})\mathcal{A}^2(\vec{v})$

$= (\mathcal{A}^2 + \mathcal{E})(\mathcal{A}^2 + \mathcal{E} - \mathcal{E})(\vec{v})$

$= (\mathcal{A}^2 + \mathcal{E})^2(\vec{v}) - (\mathcal{A}^2 + \mathcal{E})(\vec{v})$

$= -(\mathcal{A}^2 + \mathcal{E})(\vec{v}) = -\overrightarrow{e_{12}}$

类似地 $\mathcal{A}(\overrightarrow{e_{12}})=\overrightarrow{e_{11}},\mathcal{A}(\overrightarrow{e_{21}})=\overrightarrow{e_{12}}-\overrightarrow{e_{22}},\mathcal{A}(\overrightarrow{e_{22}})=\overrightarrow{e_{21}}$

$$\left(\mathcal{A}(\overrightarrow{e_{11}}),\mathcal{A}(\overrightarrow{e_{12}}),\mathcal{A}(\overrightarrow{e_{21}}),\mathcal{A}(\overrightarrow{e_{22}})\right)$$

$$=(\overrightarrow{e_{11}},\overrightarrow{e_{12}},\overrightarrow{e_{21}},\overrightarrow{e_{22}})\underbrace{\begin{pmatrix}\boxed{\begin{matrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{matrix}} & \begin{matrix}0 & 0\\ \boxed{1} & 0\end{matrix}\\ \begin{matrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{matrix} & \boxed{\begin{matrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{matrix}}\end{pmatrix}}_{J_A}$$

【定理 8.1】矩阵的准素标准有理型

设$A\in M_n(F)$, 则存在 $d_1,\dots,d_l\in\mathbb{Z}^+,p_1,\dots,p_s\in F[t]\setminus F$不可约

使得 $A\sim\operatorname{diag}\left(J_{d_1}(p_1),\dots,J_{d_l}(p_l)\right)$

证略.

§9 初等因子组

【定义 9.1.1】重集

重集(multi − sets) − 集合中相同的元素允许多次出现

例：作为重集$\underbrace{\{a,a,b\}}_{a\text{重数为 }2} \neq \{a,b\}$

$120 = 2^3 \times 3 \times 5$　不同的素因子{2,3,5} 重集{2,2,2,3,5}

【定义 9.1.2】初等因子组

设$\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V), V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_l$　[*]

其中 $V_1, \ldots, V_l$是$\mathcal{A}$ − 不可分的

设 $\mathcal{A}_i = \mathcal{A}\big|_{V_i}, i = 1, \ldots, l$

则重集 $\left\{\mu_{\mathcal{A}_1}, \ldots, \mu_{\mathcal{A}_l}\right\}$称为$\mathcal{A}$关于[*]的初等因子组

【例 9.1.1】标准基分解的初等因子组

$\mathcal{E}: \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$　$\overrightarrow{e_1}, \ldots, \overrightarrow{e_n}$是标准基

$\mathbb{C}^n = \underbrace{\langle\overrightarrow{e_1}\rangle}_{t-1} \oplus \underbrace{\langle\overrightarrow{e_2}\rangle}_{t-1} \oplus \cdots \oplus \underbrace{\langle\overrightarrow{e_n}\rangle}_{t-1}$ 是$\mathcal{A}$ − 不可分的直和分解

设$\mathcal{A}\big|_{\langle\overrightarrow{e_i}\rangle} = \mathcal{A}_i, i = 1, \ldots, n$

则$\mathcal{A}$关于该直和分解的初等因子组

$\left\{\mu_{\mathcal{A}_1}, \ldots, \mu_{\mathcal{A}_n}\right\} = \{t-1, t-1, \ldots, t-1\}$

【本节目的】

①证明初等因子组由$\mathcal{A}$确定，与V的$\mathcal{A}-$不可分子空间的直和分解无关

②通过初等因子组可以“唯一”地确定 Jordan 标准型

【引理 9.1】循环向量的极小多项式分解引理

设 $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V), V = F[\mathcal{A}] \cdot \vec{v}, \quad \mu_{\mathcal{A},\vec{v}} = pq, \quad p, q \in F[t] \setminus F$, 首一

令 $\vec{w} = q(\mathcal{A})(\vec{v})$, 则 $\mu_{\mathcal{A},\vec{w}} = p$

证: $p(\mathcal{A})(\vec{w}) = p(\mathcal{A}) \circ q(\mathcal{A})(\vec{v})$

$= pq(\mathcal{A})(\vec{v}) = \mu_{\mathcal{A},\vec{v}}(\mathcal{A})(\vec{v}) = \vec{0}$

$\Rightarrow \mu_{\mathcal{A},\vec{w}} \,\big|\, p$

$\vec{0} = \mu_{\mathcal{A},\vec{w}}(\vec{w}) = \mu_{\mathcal{A},\vec{w}}(\mathcal{A}) \circ q(\mathcal{A})(\vec{v}) = \big(\mu_{\mathcal{A},\vec{w}} q\big)(\mathcal{A})(\vec{v})$

$\Rightarrow \mu_{\mathcal{A},\vec{v}} \,\big|\, \mu_{\mathcal{A},\vec{w}} q \Rightarrow pq \,\big|\, \mu_{(\mathcal{A},\vec{w})} q$

$\Rightarrow p \,\big|\, \mu_{\mathcal{A},\vec{w}}$

$\Rightarrow p = \mu_{\mathcal{A},\vec{w}}$ ■

【引理 9.2】极小因子作用的算子的秩

设$\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V), V = F[\mathcal{A}] \cdot \vec{v}$, 设$\mu_{\mathcal{A}} = p^m, p \in F[t]$

则 $\forall k \in \mathbb{N}, \operatorname{rank}(p(\mathcal{A})^k) = \begin{cases} (m-k)\deg p & 0 \le k < m \\ 0 & k \ge m \end{cases}$

证: $\forall \vec{x} \in F[\mathcal{A}] \cdot \vec{v}, \exists f \in F[t]$使得 $\vec{x} = f(\mathcal{A})(\vec{v})$ $\big[$命题 $5.3(ii)\big]$

于是 $p(\mathcal{A})^k(\vec{x}) = p(\mathcal{A})^k \circ f(\mathcal{A})(\vec{v}) = f(\mathcal{A})\Big(p^k(\mathcal{A})(\vec{v})\Big)$

令$\vec{w} = p^k(\mathcal{A})(\vec{v})$, 则$p^k(\mathcal{A})(\vec{x}) = f(\mathcal{A})(\vec{w})$

于是 $\operatorname{im}(p(\mathcal{A})^k) = \{f(\mathcal{A})(\vec{w}) | f \in F[t]\} = F[\mathcal{A}] \cdot \vec{w}$

当 $k \ge m, \vec{w} = p^k(\vec{v}) = p^{k-m}(\mathcal{A}) p^m(\mathcal{A})(\vec{v}) = \vec{0}$

$\Rightarrow \operatorname{rank} p^k(\mathcal{A}) = 0$

当 $0 \le k < m$

$\dim F[\mathcal{A}] \cdot \vec{w} = \deg \mu_{\mathcal{A},\vec{w}}$ $\quad$ [命题 5.4]

$= \deg p^{m-k} = (m-k) \deg p = \operatorname{rank} p^k(\mathcal{A})$ ■

【引理 9.3】算子作用保持不变子空间分解

设$\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V), f \in F[t]$,如果 $V = U_1 \oplus \cdots \oplus U_l$

$U_1, \ldots, U_l$是$\mathcal{A}-$子空间 则

$f(\mathcal{A})(V) = f(\mathcal{A})(U_1) \oplus \cdots \oplus f(\mathcal{A})(U_l)$

证:令 $W = f(\mathcal{A})(U_1) + \cdots + f(\mathcal{A})(U_l)$

由命题 5.2(i), $f(\mathcal{A})(U_i) \subset U_i, i = 1, \ldots, l$

由第一章命题 4.1 中(iii)与(i)等价性

$\because U_i \cap (U_1 + \cdots + U_{i-1} + U_{i+1} + \cdots + U_l) = \{\vec{0}\}, \qquad i = 1, \ldots, l$

$\therefore f(\mathcal{A})(U_i)$

$\cap \left(f(\mathcal{A})(U_1) + \cdots + f(\mathcal{A})(U_{i-1}) + f(\mathcal{A})(U_{i+1}) + \cdots + f(\mathcal{A})(U_l)\right)$

$= \{\vec{0}\}, \qquad i = 1, \ldots, l$

$\therefore W = f(\mathcal{A})(U_1) \oplus \cdots \oplus f(\mathcal{A})(U_l)$

$\because f(\mathcal{A})(U_i) \subset f(\mathcal{A})(V) \quad \therefore W \subset f(\mathcal{A})(V)$

反之,设 $\vec{w} \in f(\mathcal{A})(V), \exists \vec{v} \in V$,使得 $\vec{w} = f(\mathcal{A})(\vec{v})$

$\exists \overrightarrow{u_\iota} \in U_i$,使得$\vec{v} = \overrightarrow{u_1} + \cdots + \overrightarrow{u_l}$

$\vec{w} = f(\mathcal{A})(\vec{v}) = f(\mathcal{A})(\overrightarrow{u_1}) + \cdots + f(\mathcal{A})(\overrightarrow{u_l})$

$\in f(\mathcal{A})(U_1) + \cdots + f(\mathcal{A})(U_l) = W$

于是$f(\mathcal{A})(V) \subset W \Rightarrow f(\mathcal{A})(V) = W$ ■

【定理 9.1】初等因子组中某项重数计算公式

设$\mathcal{A}\in\mathcal{L}(V),\mu_{\mathcal{A}}=p^m$,其中$p\in F[t]$不可约

对$\forall l\in\mathbb{Z}^+$,令n_l为p^l在$\mathcal{A}$关于某个$\mathcal{A}-$不可分子空间

直和分解的初等因子组中的重数

再令 $r_l=\operatorname{rank}(p(\mathcal{A})^l)$,其中$l\in\mathbb{N}$

则$n_l=\dfrac{1}{d}(r_{l+1}+r_{l-1}-2r_l)$,其中$d=\deg p$

证:设 $V=V_1\oplus\cdots\oplus V_k$,其中 V_i是$\mathcal{A}-$不可分的,$i=1,\dots,k$

令$\mathcal{A}_i=\mathcal{A}\big|_{V_i},i=1,\dots,k$

$\mu_i=\mu_{\mathcal{A}_i}=p^{m_i},1\le m_i\le m\ \left[\because p\text{是不可约的}\right]$

n_l是p^l在重集$\{\mu_1,\dots,\mu_k\}$中的重数

令$S_l=\{U\in\{V_1,\dots,V_k\}|\dim U=ld\}$

如果 $\mathcal{A}_i$对应的极小多项式是$p^l\Rightarrow\dim V_i=ld$

于是 $n_l=\operatorname{card}(S_l)$,下面来计算$\operatorname{card}S_l$

$$V=\bigoplus_{i=1}^{k}V_i=\bigoplus_{j=1}^{m}\left(\bigoplus_{U\in S_j}U\right)\quad\dim U=jd$$

$$\dim\bigoplus_{U\in S_j}U=(jd)n_J$$

由引理 9.3,

$$p(\mathcal{A})^l(V)=p(\mathcal{A})^l\left(\bigoplus_{j=1}^{m}\left(\bigoplus_{U\in S_j}U\right)\right)=\left(\bigoplus_{j=1}^{m}\left(\bigoplus_{U\in S_j}p(\mathcal{A})^l(U)\right)\right)$$

由第一章命题 4.2 $\dim p(\mathcal{A})^l(V)=\sum_{j=1}^{m}\sum_{U\in S_j}\dim\left(p(\mathcal{A})^l(U)\right)$

令 $\mathcal{A}_U=\mathcal{A}\big|_U$,于是$r_l=\sum_{j=1}^{m}\sum_{U\in S_j}\operatorname{rank}(p(\mathcal{A}_U)^l)\quad[*]$

$\left[\dim\left(p(\mathcal{A})^l(U)\right) = \dim\left(p(\mathcal{A}_U)^l(U)\right) = \operatorname{rank} p(\mathcal{A}_U)^l\right]$

$\mathcal{A}_U \in \mathcal{L}(U), U$是$\mathcal{A}\big|_U -$循环的

$\left[U\text{是}\mathcal{A} - \text{不可分的} \Rightarrow U\text{是}\mathcal{A}\big|_U - \text{不可分的}\right]$

$\mathcal{A}_U$的极小多项式为p^j

由引理 9.2, $\quad \operatorname{rank} p(\mathcal{A}_U)^l = \begin{cases}(j-l)d & 0 \le l < j \\ 0 & l \ge j\end{cases}$

U是$\mathcal{A} -$不可分的 $\Rightarrow U$的一个是$\mathcal{A} -$循环的 [命题 6.3]

引理 9.2 适用于$\mathcal{A}_U$

由 $*$ 式，$r_l = \sum_{j=l+1}^{m} \sum_{U \in S_j} (j-l)\, d = d\left[\sum_{j=l+1}^{m} n_J (j-l)\right]$

当 $l \ge 1$ 时 $r_{l-1} = d\left[\sum_{j=l}^{m} n_J (j-l+1)\right]$

$$= \ d\left[n_l + 2n_{l+1} + \sum_{j=l+2}^{m} \sum_{U \in S_j} n_J (j-l+1)\right]$$

$$r_l = d\left[\sum_{j=l+1}^{m} n_J (j-l)\right] = d\left[n_{l+1} + \sum_{j=l+2}^{m} \sum_{U \in S_j} n_J (j-l)\right]$$

$$r_{l+1} = d\left[\sum_{j=l+2}^{m} n_J (j-l-1)\right]$$

$$r_{l-1} + r_{l+1} - 2r_l$$

$$= d(n_l + 2n_{l+1} - 2n_{l+1}) + d\left(\sum_{j=l+2}^{m} n_j (j-l+1-2(j-l)+j-l-1)\right)$$

$$= dn_l$$

$$n_l = \frac{1}{d}(r_{l-1} + r_{l+1} - 2r_l) \qquad \blacksquare$$

注:n_l与我们特定选取的直和分解无关

【例 9.1.2】求单一因子方阵的 Jordan 标准型例

设 $A=\begin{pmatrix}\alpha&0&0&0\\0&\alpha&0&0\\0&0&\alpha&0\\\alpha&0&0&\alpha\end{pmatrix}$, 其中$\alpha\in\mathbb{C}\setminus\{\vec{0}\}$, 求$J_A$

解: 把A看成$\mathcal{A}\in\mathcal{L}(\mathbb{C}^4),\mathcal{X}_{\mathcal{A}}=(t-\alpha)^4,p=t-\alpha$

$\mu_A=p^m$, 其中$m\in\{1,2,3,4\}$

$r_0=\operatorname{rank}p(\mathcal{A})^0=4$

$r_1=\operatorname{rank}p(\mathcal{A})=\operatorname{rank}(A-\alpha E)=\operatorname{rank}\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\\alpha&0&0&0\end{pmatrix}=1$

$r_2=\operatorname{rank}p(\mathcal{A})^2=\operatorname{rank}(A-\alpha E)^2=0$

$n_1=\dfrac{1}{d}(r_0+r_2-2r_1)=4+0-2=2$

$\Rightarrow n_2=1$

初等因子组$\{t-\alpha,t-\alpha,(t-\alpha)^2\}$

$J_A=\operatorname{diag}\big(J_1(\alpha),J_1(\alpha),J_2(\alpha)\big)=\begin{pmatrix}\boxed{\alpha}&0&0&0\\0&\boxed{\alpha}&0&0\\0&0&\alpha&1\\0&0&0&\alpha\end{pmatrix}$

此外$\mu_{\mathcal{A}}=(t-\alpha)^2$

【定理 9.2】初等因子组重数计算公式

设$\mathcal{A}\in\mathcal{L}(V),\mu_{\mathcal{A}}$的两两不同，首一的不可约因子是$p_1,\dots,p_s\in F[t]$

设 $V=V_1\oplus\cdots\oplus V_k$ [*], 其中$V_1,\dots,V_k$是$\mathcal{A}-$不可分的

令$N(i,l)$是p_i^l在$\mathcal{A}$关于[*]的初等因子组的重数，其中

$i\in\{1,..,k\},l\in\mathbb{Z}^+$, 令$R_{i,l}=\operatorname{rank}(p_i(\mathcal{A})^l)$, $i\in\{1,\dots,k\},l\in\mathbb{N}$

则 $N(i,l)=\dfrac{1}{\deg p_i}\big(R_{i,l-1}+R_{i,l+1}-2R_{i,l}\big)$

证：不妨只考虑 $i=1$,

令 $\mathbb{S}=\left\{U\in\{V_1,\dots,V_k\}\middle|\mathcal{A}\big|_U\text{的极小多项式是}p_1\text{的某个幂次}\right\}$

$\widetilde{\mathbb{S}}=\{V_1,\dots,V_k\}\setminus\mathbb{S}$, 令 $W=\bigoplus\limits_{U\in\mathbb{S}}U$, $\widetilde{W}=\bigoplus\limits_{\widetilde{U}\in\widetilde{\mathbb{S}}}\widetilde{U}$

则 $V=W\oplus\widetilde{W}$

断言 1　设 $r_l=\operatorname{rank}p_1^l\left(\mathcal{A}\big|_W\right), l\in\mathbb{N}$ 则

$$N(1,l)=\frac{1}{\deg p_1}(r_{l-1}+r_{l+1}-2r_l)$$

断言 1 的证明

$W=\bigoplus\limits_{U\in\mathbb{S}}U$ 是 $\mathcal{A}\big|_W-$ 不可分子空间分解,

$\forall\widetilde{U}\in\widetilde{\mathbb{S}},\mathcal{A}\big|_{\widetilde{U}}$ 的极小多项式与 p_1 互素,

于是 $N(1,l)$ 是 p_1^l 在 $\mathcal{A}\big|_W$ 的初等因子组中的重数

由定理 9.1（用于 $W,\mathcal{A}\big|_W$ 上）

$N(1,l)=\dfrac{1}{\deg p_1}(r_{l-1}+r_{l+1}-2r_l)$ 断言 1 成立

断言 2　$p_1(\mathcal{A})\big|_{\widetilde{W}}$ 可逆

断言 2 的证明

注意到 $W=V(p_1),\widetilde{W}=V(p_2)\oplus\cdots\oplus V(p_s)$

由定理 6.1(iii), $p_1(\mathcal{A})\big|_{\widetilde{W}}$ 可逆　　断言 2 成立

断言 3　$\forall l\in\mathbb{N},R_{1,l}=r_l+\dim\widetilde{W}$

断言 3 的证明

$R_{1,l}=\operatorname{rank}(p_1(\mathcal{A})^l)=\dim\left(p_1(\mathcal{A})^l(V)\right)$

$=\dim p_1(\mathcal{A})^l\left(W\oplus\widetilde{W}\right)$

$=\dim\left(p_1(\mathcal{A})^lW\oplus p_1(\mathcal{A})^l\widetilde{W}\right)$　　[引理 9.3]

$= \dim p_1(\mathcal{A})^l(W) + \dim p_1(\mathcal{A})^l(\widetilde{W})$

$= r_l + \dim \widetilde{W} \quad [\because 断言 2]$

断言 3 成立

由断言 1

$$N(1,l) = \frac{1}{\deg p_1}(r_{l-1} + r_{l+1} - 2r_l)$$

$$= \frac{1}{\deg p_1}\left(R_{1,l-1} - \dim \widetilde{W} + R_{1,l+1} - \dim \widetilde{W} - 2\left(R_{1,l} - \dim \widetilde{W}\right)\right)$$

$$= \frac{1}{\deg p_1}(R_{1,l-1} + R_{1,l+1} - 2R_{1,l})$$

■

【例 9.1.3】求 Jordan 标准型例

$A_1 = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 4 & -5 \end{pmatrix}$ $A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$ $A_3 = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$

$A = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ O & A_3 \end{pmatrix}$ 求J_A

解:$\mathcal{X}_A = \mathcal{X}_{A_1}\mathcal{X}_{A_3} = (t+1)^2(t-1)^2$

$p_1 = t+1, p_2 = t-1$

$R(1,0) = 4$

$R(1,1) = \operatorname{rank}\left(p_1(A)\right) = \operatorname{rank}\begin{pmatrix} A_1 + E_2 & A_2 \\ O & A_3 + E_2 \end{pmatrix} = 3$

$R(1,2) = \operatorname{rank}((A+E)^2) = \operatorname{rank}\begin{pmatrix} O & * \\ O & (A_3 + E_2)^2 \end{pmatrix} = 2$

$N(1,1) = R_{1,0} + R_{1,2} - 2R_{1,1} = 0$

$R(1,3) = \operatorname{rank}\begin{pmatrix} O & * \\ O & (A_3 + E_2)^3 \end{pmatrix} = 2$

$N(1,2) = 3 + 2 - 2 \times 2 = 1$, 同理 $N(2,1) = 0, N(2,2) = 1$

初等因子组 $\{(t+1)^2, (t-1)^2\}$

$$J_A=\begin{pmatrix} J_2(-1) & O \\ O & J_2(1) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

【例 9.1.4】由秩求 Jordan 标准例

$A\in M_5(\mathbb{C})$, 满足 $\operatorname{rank}A=3, \operatorname{rank}A^2=2, \operatorname{rank}(A+E)=4$

$\operatorname{rank}(A+E)^2=3$ 求J_A

解: $\operatorname{rank}A=3<5\Rightarrow t\,\big|\,\mathcal{X}_{\mathcal{A}}(t)$

$\operatorname{rank}(A+E)=4<5\Rightarrow t+1\,\big|\,\mathcal{X}_{\mathcal{A}}(t)$

$p_1=t, p_2=t+1$

$N(1,1)=R(1,0)+R(1,2)-2R(1,1)=5+2-2\times 3=1$

$N(2,1)=R(2,0)+R(2,2)-2R(2,1)=5+3-2\times 4=0$

$$J_A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & ? & ? & ? \\ 0 & 0 & \lambda_3 & ? & ? \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_4 & ? \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_5 \end{pmatrix}$$

$N(1,1)=1\Rightarrow \lambda_2,\lambda_3,\lambda_4,\lambda_5$中没有或至少有两个 0

$\big[$考虑$N(1,1)$对应的约当块(0), 注意到左上角已经有 1 个该约当块$\big]$

$\operatorname{rank}J_A=3\Rightarrow \lambda_2,\lambda_3,\lambda_4,\lambda_5$中至少有一个是 0

$\therefore \lambda_2,\lambda_3,\lambda_4,\lambda_5$中至少有两个是 0

$N(2,1)=0\Rightarrow \lambda_2,\lambda_3,\lambda_4,\lambda_5$中至多有两个是 0

$\big[$考虑$N(2,1)$对应的约当块$(-1)\big]$

于是可推断$N(2,2)=1, N(1,2)=1$, 初等因子组为$\{t,t^2,(t+1)^2\}$

$$J_A=\begin{pmatrix} \boxed{0} & & \\ & \boxed{\begin{matrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{matrix}} & \\ & & \boxed{\begin{matrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{matrix}} \end{pmatrix}$$ ■

§10 Jordan 标准型的唯一性和应用

【定理 10.1】Jordan 标准型的唯一性

设 $A \in M_n(\mathbb{C})$,

$B = \operatorname{diag}\left(J_{d_1}(\lambda_1), \dots, J_{d_k}(\lambda_k)\right), C = \operatorname{diag}\left(J_{l_1}(\alpha_1), \dots, J_{l_m}(\alpha_m)\right)$

是A 在 $\mathbb{C}$ 上的两个$Jordan$标准型

则有$k = m$, 并在适当调整下标之后

有$d_1 = l_1, \dots, d_k = l_k, \qquad \lambda_1 = \alpha_1, \dots, \lambda_k = \alpha_k$

证: 设$\mathcal{A}: \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n, \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mapsto A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \mathcal{A} \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$

由定理 3.2, $\exists \mathcal{A}-$子空间$U_1, \dots, U_k$使得

$\mathbb{C}^n = U_1 \oplus \cdots \oplus U_k \quad [*]$

令$\mathcal{A}_i = \mathcal{A}\big|_{U_i}$, 则在$U_i$的某组基下$\mathcal{A}_i$的矩阵是$J_{d_i}(\lambda_i)$

由此可知$\dim U_i = d_i$, 而$J_{d_i}(\lambda_i)$的极小多项式是$(t - \lambda_i)^{d_i}$

于是U_i是$\mathcal{A}-$不可分的[命题 6.1,6.3]

即[*]是$\mathcal{A}-$不可分子空间直和分解, 于是

$\mathcal{A}$关于[*]的初等因子组$L_B = \{(t-\lambda_1)^{d_1}, \dots, (t-\lambda_k)^{d_k}\}$

同理, $\mathcal{A}$关于另一组$\mathcal{A}-$不可分子空间直和分解的初等因子组

$L_C = \{(t-\alpha_1)^{l_1}, \dots, (t-\alpha_m)^{l_m}\}$

由定理 9.2, $L_B = L_C$[作为重集]

$\therefore k = m$ 且适当调整下标后$d_i = l_i, \lambda_i = \alpha_i, i = 1, \dots, k \quad \blacksquare$

注：该定理对任何域都成立，因为定理 9.2 如此。

【定理 10.2】相似的判定法

设$A,B \in M_n(F)$, 则$A \sim_s B \Leftrightarrow$

$(i)\mu_A = \mu_B\big(或\mathcal{X}_A = \mathcal{X}_B\big)$

(ii)对于μ_A的任何不可约因子,

$\operatorname{rank}\big(p(A)^i\big) = \operatorname{rank}\big(p(B)^i\big), i = 0,1,..,n+1$

证: $\Rightarrow$: $\because A \sim_s B \quad \therefore \mu_A = \mu_B, \mathcal{X}_A = \mathcal{X}_B$

设$B = T^{-1}AT, T \in GL_n(F)$

则$\forall k \in \mathbb{N}, B^k = T^{-1}A^kT$

$\Rightarrow \forall f \in F[t], f(B) = f(T^{-1}AT) = T^{-1}f(A)T$

$\Rightarrow \operatorname{rank} f(A) = \operatorname{rank} f(B)$

$\Leftarrow$: 由定理 9.2$(i)(ii)$, A,B对应的初等因子组一样

由定理 10.1,, $J_A = J_B$ $\big[$适当调整下标后$\big]$

$\because A \sim_s J_A, B \sim_s J_B \Rightarrow A \sim_s B$ ■

【例 10.1.1】全 1 矩阵的 Jordan 标准型

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{C}), 求J_A$$

解: $A^0 = E, A^2 = nA \Rightarrow \mu_A = t^2 - nt = (t-n)t$

$p_1 = t, \operatorname{rank} A^0 = n, \operatorname{rank} A = 1, \operatorname{rank} A^2 = 1$

$N(1,1) = \operatorname{rank} A^0 + \operatorname{rank} A^2 - 2\operatorname{rank} A = n + 1 - 2 = n - 1$

$\therefore N(2,1) = 1$

$\Rightarrow J_A = \operatorname{diag}(0, \dots, 0, n)$

另解: $\because \mu_A = t(t-n) \Rightarrow A$可对角化

$\because \operatorname{rank} A = 1 \quad \therefore J_A = \operatorname{diag}(n, 0, \dots, 0)$

【例 10.1.2】转置相似

设$A \in M_n(F)$,证明$A \sim_s A^t$

证:由$(A^k)^t = (A^t)^k$

$\forall A, B \in M_n(F), \alpha, \beta \in F, (\alpha A + \beta B)^t = \alpha A^t + \beta B^t$

可知$\forall f \in F[t]. f(A)^t = f(A^t)$

$\Rightarrow \operatorname{rank} f(A^t) = \operatorname{rank} f(A)^t = \operatorname{rank} f(A)$

$\mathcal{X}_{A^t} = |tE - A^t| = |(tE - A)^t| = |tE - A| = \mathcal{X}_A$

$\operatorname{rank} p(A) = \operatorname{rank} p(A^t) \Rightarrow A \sim_s A^t$

【例 10.1.3】二阶矩阵平方根例

求矩阵方程$X^2 = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$在$M_2(\mathbb{C})$的解

解 1:设$X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, X^2 = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$

$$\begin{cases} a^2 + bc = 3 \\ ab + cd = 1 \\ ac + cd = -1 \\ bc + d^2 = 5 \end{cases} \Rightarrow X_1 = \begin{pmatrix} \frac{7}{4} & \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & \frac{9}{4} \end{pmatrix}, X_2 = \begin{pmatrix} -\frac{7}{4} & -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & -\frac{9}{4} \end{pmatrix}$$

解 2:设$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}, \mathcal{X}_A = \begin{vmatrix} t-3 & -1 \\ 1 & t-5 \end{vmatrix} = (t-4)^2$

$p = t - 4, r_0 = \operatorname{rank} p(A)^0 = 2, r_1 = \operatorname{rank} p(A) = \operatorname{rank} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = 1$

$r_2 = \operatorname{rank} p(A)^2 = \operatorname{rank} \left[\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \right] = 0$

$n_1 = r_0 + r_2 - 2r_1 = 0 \Rightarrow J_A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

$A \sim_s J_A \Rightarrow \exists S \in M_2(\mathbb{C})$使得$J_A = S^{-1}AS, SJ_A = AS$

设$S = \begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{21} & s_{22} \end{pmatrix}$,由$SJ_A = AS, \begin{cases} s_{11} - s_{21} = 0 \\ s_{11} - s_{21} = 0 \\ s_{11} + s_{12} - s_{21} = 0 \\ s_{12} + s_{21} - s_{22} = 0 \end{cases}$

$$\Rightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}}_{\text{rank=2}} \begin{pmatrix} s_{11} \\ s_{12} \\ s_{21} \\ s_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

取解$s_{11} = s_{21} = 1, s_{12} = 2, s_{22} = 3, S = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, S^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

先解$Y^2 = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$, 设$Y = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} a^2 + bc = 4 \\ ab + bd = 1 \Rightarrow b(a+d) = 1 \\ ac + cd = 0 \Rightarrow c(a+d) = 0 \\ bc + d^2 = 4 \end{cases}$

$\therefore (a+d) \neq 0, c = 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} a^2 = 4 \\ d^2 = 4 \\ (a+d)b = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ d = 2 \\ c = 0 \\ b = \dfrac{1}{4} \end{cases} \text{或} \begin{cases} a = -2 \\ d = -2 \\ c = 0 \\ b = -\dfrac{1}{4} \end{cases}$$

$\Rightarrow Y^2 = J_A \Rightarrow (SYS^{-1})^2 = SY^2S^{-1} = SJ_AS^{-1} = A$

$$\Rightarrow X_1 = S\begin{pmatrix} 2 & \dfrac{1}{4} \\ 0 & 2 \end{pmatrix}S^{-1}, X_2 = S\begin{pmatrix} -2 & -\dfrac{1}{4} \\ 0 & -2 \end{pmatrix}S^{-1}$$

【例 10.1.4】复可逆矩阵可逆

设$A \in M_n(\mathbb{C})$可逆, 证明$\forall k \in \mathbb{Z}^+, X^k = A$ 在$M_n(\mathbb{C})$中有解

注: 可直接验证$X^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$无解

证: 先设$A = J_n(\lambda)$, 因为A可逆, 所以$\lambda \neq 0$

$$X^k = J_n(\lambda) = \lambda \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{\lambda} & & & \\ & 1 & \frac{1}{\lambda} & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 & \frac{1}{\lambda} \\ & & & & 1 \end{pmatrix}}_{B}$$

由此可知$\left(\dfrac{1}{\sqrt[k]{\lambda}}X\right)^k = B$

由第 14 次作业可知, $B^k \sim_s B$

$\exists S \in GL_n(\mathbb{C})$, 使得 $S^{-1}B^kS = B$

即 $(S^{-1}BS)^k = B$

令 $X = \sqrt[k]{\lambda}(S^{-1}BS)$

$X^k = \left(\sqrt[k]{\lambda}(S^{-1}BS)\right)^k = \lambda S^{-1}B^kS = \lambda B = A$

由此可知当 $A = J_n(\lambda)$ 时 $X^k = A$ 在 $M_n(\mathbb{C})$ 中有解

再考虑 $A = \operatorname{diag}\left(J_{d_1}(\lambda), \dots, J_{d_n}(\lambda_n)\right)$

其中 $d_1, \dots, d_n \in \mathbb{Z}^+, \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$

由上述结论可知 $\exists X_i \in M_{d_i}(\mathbb{C})$ 使得 $X_i^k = J_{d_i}(\lambda_i), i = 1, \dots, n$

令 $X = \operatorname{diag}(X_1, \dots, X_n)$

则 $X^k = \operatorname{diag}(X_1^k, \dots, X_n^k) = \operatorname{diag}\left(J_{d_1}(\lambda), \dots, J_{d_n}(\lambda_n)\right) = A$

一般情形: 设 $A \in M_n(\mathbb{C})$ 可逆

$\exists T \in GL_n(\mathbb{C})$, 使得 $J_A = T^{-1}AT$

由上述结论, $\exists Y \in M_n(\mathbb{C})$, 使得 $Y^k = J_A = T^{-1}AT$

$\Rightarrow TY^kT^{-1} = A \Rightarrow (TYT^{-1})^k = A \Rightarrow X = TYT^{-1}$ ■

第二章总结

$F=\mathbb{C}$

$A\sim_s J_A=\operatorname{diag}\left(J_{d_1}(\lambda_1),\dots,J_{d_k}(\lambda_k)\right)$

$\mathcal{X}_A=(t-\lambda_1)^{d_1}\cdots(t-\lambda_k)^{d_k}$

$\mu_A=\operatorname{lcm}((t-\lambda_1)^{d_1},\dots,(t-\lambda_k)^{d_k})$

$\Rightarrow \mu_A \,\big|\, \mathcal{X}_A\big(C-H$定理$\big)$

特征根$\lambda_1,\dots,\lambda_k$(不一定两两不同)

A可对角化 $\Leftrightarrow d_1=\cdots=d_k \Leftrightarrow \mu_A$无重根

【去年期末考题】

证明: $(i)A$的以λ为特征值$Jordan$块的个数为$\dim V^\lambda$

$(ii)J_A$中$Jordan$块的个数是$\displaystyle\sum_{\lambda\in\operatorname{spec}A}V^\lambda$

第三章 内积空间

§1 欧氏空间

§1.1 内积

【定义 1.1.1】欧氏空间

设V是 $\mathbb{R}$ 上n维线性空间,$f: V\times V\to\mathbb{R}$ 是对称双线性型

使得f对应的二次型$q(\vec{x})=f(\vec{x},\vec{x})$是正定的

双线性:$\forall\vec{x},\vec{y},\vec{z}\in V,\alpha,\beta\in\mathbb{R}$

$f(\alpha\vec{x}+\beta\vec{y},\vec{z})=\alpha f(\vec{x},\vec{z})+\beta f(\vec{y},\vec{z})$

$f(\vec{x},\alpha\vec{y}+\beta\vec{z})=\alpha f(\vec{x},\vec{y})+\beta f(\vec{x},\vec{z})$

对称:$f(\vec{x},\vec{y})=f(\vec{y},\vec{x})$

正定:$\forall\vec{x}\in V\setminus\{\vec{0}\},q(\vec{x})=f(\vec{x},\vec{x})>0$

称(V,f)是一个欧氏空间,其中f称为V上的内积

【例 1.1.1】标准欧氏空间

$$V=\mathbb{R}^n,f:\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R},\left(\begin{pmatrix}x_1\\\vdots\\x_n\end{pmatrix},\begin{pmatrix}y_1\\\vdots\\y_n\end{pmatrix}\right)\mapsto x_1y_1+\cdots+x_ny_n$$

$$f\left(\begin{pmatrix}x_1\\\vdots\\x_n\end{pmatrix},\begin{pmatrix}x_1\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}\right)=x_1^2+\cdots+x_n^2$$

称之为标准欧氏空间

【符号化简】

设(V,f)是欧氏空间,$\vec{x},\vec{y}\in V$

记$f(\vec{x},\vec{y})$为$(\vec{x},\vec{y})$或$\vec{x}\cdot\vec{y}$ $\quad(\vec{x}\,|\,\vec{y})$不常用

双线性: $(\alpha\vec{x}+\beta\vec{y},\vec{z})=\alpha(\vec{x},\vec{z})+\beta(\vec{y},\vec{z})$

$(\vec{x},\alpha\vec{y}+\beta\vec{z})=\alpha(\vec{x},\vec{y})+\beta(\vec{x},\vec{z})$

$(\alpha\vec{x}+\beta\vec{y})\cdot\vec{z}=\alpha(\vec{x}\cdot\vec{z})+\beta(\vec{y}\cdot\vec{z})$

$\vec{x}\cdot(\alpha\vec{y}+\beta\vec{z})=\alpha(\vec{x}\cdot\vec{y})+\beta(\vec{x}\cdot\vec{z})$

对称: $(\vec{x},\vec{y})=(\vec{y},\vec{x}),\vec{x}\cdot\vec{y}=\vec{y}\cdot\vec{x}$

正定: $\forall\vec{x}\in V\setminus\{\vec{0}\},(\vec{x},\vec{x})>0\quad\vec{x}\cdot\vec{x}>0$

【命题 1.1】欧氏空间的基本性质

设V是欧氏空间

$(i)\forall\vec{x}\in V,\vec{0}\cdot\vec{x}=0$

$(ii)\vec{x}\cdot\vec{x}=0\Leftrightarrow\vec{x}=\vec{0}$

证: $(i)\ \vec{0}\cdot\vec{x}=\left(\vec{0}+\vec{0}\right)\cdot\vec{x}=\vec{0}\cdot\vec{x}+\vec{0}\cdot\vec{x}\Rightarrow\vec{0}\cdot\vec{x}=0$

$(ii)\Rightarrow$: 正定　$\Leftarrow$: (i)　■

注: 在本节中V是线性空间, $\vec{v}\in V,L_{\vec{v}}:V\to\mathbb{R},\vec{x}\mapsto\vec{v}\cdot\vec{x}$

$L_{\vec{v}}$是V上的线性函数, 换言之$L_{\vec{v}}\in V^*$

【定义 1.1.2】Gram 矩阵

设$\overrightarrow{v_1},\dots,\overrightarrow{v_s}\in V,G(\overrightarrow{v_1},\dots,\overrightarrow{v_s}):=\left(\overrightarrow{v_i}\cdot\overrightarrow{v_j}\right)_{\substack{i=1,\dots,s\\ j=1,\dots,s}}$

称$G(\overrightarrow{v_1},\dots,\overrightarrow{v_s})$是$(\overrightarrow{v_1},\dots,\overrightarrow{v_s})$的$Gram$矩阵

它是s阶实对称方阵

【定理 1.1】Gram 矩阵秩判定线性相关性

设$\overrightarrow{v_1},\dots,\overrightarrow{v_s}\in V,\overrightarrow{v_1},\dots,\overrightarrow{v_s}$线性无关$\Leftrightarrow G(\overrightarrow{v_1},\dots,\overrightarrow{v_s})$满秩

证: $\Leftarrow$: $\forall i,j\in\{1,\dots,s\},\overrightarrow{v_i}\cdot\overrightarrow{v_j}=L_{\overrightarrow{v_i}}\left(\overrightarrow{v_j}\right)$

由第一章引理 9.3, $G(\overrightarrow{v_1},\dots,\overrightarrow{v_s})$满秩 $\Rightarrow \overrightarrow{v_1},\dots,\overrightarrow{v_s}$线性无关

$\Rightarrow$: 设 $W=\langle\overrightarrow{v_1},\dots,\overrightarrow{v_s}\rangle$, 则 $\dim W=s$

而$(W,\cdot)$也是欧氏空间

那么$G(\overrightarrow{v_1},\dots,\overrightarrow{v_s})$是该内积对应的双线性型

在W的基底$\overrightarrow{v_1},\dots,\overrightarrow{v_s}$下的矩阵

由此可知该双线性型对应的二次型正定

所以$|G(\overrightarrow{v_1},\dots,\overrightarrow{v_s})|>0$

即$G(\overrightarrow{v_1},\dots,\overrightarrow{v_s})$满秩 ■

§1.2 长度（范数）和距离

【定义 1.2.1】长度

设$\vec{x} \in V$, $\sqrt{\vec{x} \cdot \vec{x}}$称为$\vec{x}$的长度或范数，记为$|\vec{x}|$或$\|\vec{x}\|$

【例 1.2.1】标准形式的内积

设$\mathbb{R}^n$是标准欧氏空间, $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $\vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n = \vec{x}^t \vec{y} = (x_1 \quad \cdots \quad x_n) \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

$$|\vec{x}| = \sqrt{\vec{x} \cdot \vec{x}} = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}$$

【例 1.2.2】迹形式的内积

设$V = M_n(\mathbb{R})$, $A, B \in V$

规定$(A, B) = \operatorname{tr}(AB^t)$

可直接验证(,)是对称，双线性的内积

正定: 设$A = (a_{ij})_{n \times n}$

$$(A, A) = \operatorname{tr}(AA^t) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2 \geq 0$$

$$\|\mathrm{A}\| = \sqrt{\operatorname{tr}(AA^t)}$$

【例 1.2.3】积分形式的内积

设 $a,b\in\mathbb{R},a<b,V=\mathbb{R}_n[x]$ $\big($或$C[a,b]\big)$

$\forall f,g\in V,(f,g):=\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x$

(f,g)是V上的一个内积，　$\|f\|=\sqrt{\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x}$

【命题 1.2】Cauchy-Buniakowski 不等式

设$\vec{x},\vec{y}\in V,|\vec{x}\cdot\vec{y}|\le|\vec{x}||\vec{y}|,$　等号成立$\Leftrightarrow\vec{x},\vec{y}$线性相关

证: 如果$\vec{y}=\vec{0}$,则该命题显然成立

设$y\neq\vec{0}$,对$\forall\lambda\in\mathbb{R}$,

$0\le(\vec{x}+\lambda\vec{y})\cdot(\vec{x}+\lambda\vec{y})=\vec{x}\cdot\vec{x}+2(\vec{x}\cdot\vec{y})\lambda+(\vec{y}\cdot\vec{y})\lambda^2$

$=|\vec{x}|^2+2(\vec{x}\cdot\vec{y})\lambda+|\vec{y}|^2\lambda^2\quad[|\vec{y}|^2\neq0]$

于是 $\triangle=4(\vec{x}\cdot\vec{y})^2-4|\vec{x}|^2|\vec{y}|^2\le0\Rightarrow|\vec{x}\cdot\vec{y}|\le|\vec{x}||\vec{y}|$

进而$|\vec{x}\cdot\vec{y}|=|\vec{x}||\vec{y}|\Leftrightarrow\triangle=0$

$\Leftrightarrow\exists\lambda_0\in\mathbb{R},|\vec{x}|^2+2(\vec{x}\cdot\vec{y})\lambda_0+|\vec{y}|^2{\lambda_0}^2=0$

$\Leftrightarrow(\vec{x}+\lambda_0\vec{y})\cdot(\vec{x}+\lambda_0\vec{y})=0$

$\Leftrightarrow\vec{x}+\lambda_0\vec{y}=\vec{0}\quad\big[$命题 $1.1(ii)\big]$

$\because\vec{y}\neq\vec{0}\quad\therefore\exists\lambda_0\in\mathbb{R}$ 使得$\vec{x}+\lambda_0\vec{y}=\vec{0}\Leftrightarrow\vec{x},\vec{y}$线性相关　■

注: 应用该不等式,在上述三个例子中,

$|x_1y_1+x_2y_2+\cdots+x_ny_n|\le\sqrt{x_1^2+\cdots+x_n^2}\sqrt{y_1^2+\cdots+y_n^2}$

$|\operatorname{tr}AB^t|\le\sqrt{\operatorname{tr}(AA^t)}\sqrt{\operatorname{tr}(BB^t)}$

$\left|\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x\right|\le\sqrt{\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x}\sqrt{\int_a^b g^2(x)\mathrm{d}x}$

【定义 1.2.2】距离

设$\vec{x},\vec{y}\in V$,　　$\vec{x},\vec{y}$之间的距离为$|\vec{x}-\vec{y}|$

【例 1.2.4】标准欧氏空间的距离

$\mathbb{R}^n$标准欧氏空间 $\vec{x}=\begin{pmatrix}x_1\\\vdots\\x_n\end{pmatrix},\vec{y}=\begin{pmatrix}y_1\\\vdots\\y_n\end{pmatrix}$

$$\vec{x}-\vec{y}=\begin{pmatrix}x_1-y_1\\\vdots\\x_n-y_n\end{pmatrix},|\vec{x}-\vec{y}|=\sqrt{(x_1-y_1)^2+\cdots+(x_n-y_n)^2}$$

【例 1.2.5】三维实空间的距离例

$\mathbb{R}^3$ 标准欧氏空间,$\overrightarrow{e_1}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\overrightarrow{e_2}=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\overrightarrow{e_3}=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$

$$|\overrightarrow{e_1}|=\sqrt{1^2+0^2+0^2}=1$$

$$|\overrightarrow{e_2}-\overrightarrow{e_3}|=\left|\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}\right|=\sqrt{0^2+1^2+(-1)^2}=\sqrt{2}$$

注:$\vec{x}\in V$,如果$|\vec{x}|=1$,则称$\vec{x}$是单位向量

【例 1.2.6】验证单位化

设$\vec{x}\in V\setminus\{\vec{0}\}$,证明$\dfrac{\vec{x}}{|\vec{x}|}$的长度为 1

证:$\left|\dfrac{\vec{x}}{|\vec{x}|}\right|=\sqrt{\dfrac{\vec{x}}{|\vec{x}|}\cdot\dfrac{\vec{x}}{|\vec{x}|}}=\sqrt{\dfrac{1}{|x|^2}(\vec{x}\cdot\vec{x})}=\dfrac{1}{|\vec{x}|}\sqrt{\vec{x}\cdot\vec{x}}=\dfrac{|\vec{x}|}{|\vec{x}|}=1$

§1.3 夹角，方向和正交（垂直）

【定义 1.3.1】夹角

设$\vec{x}.\vec{y}\in V\setminus\{\vec{0}\}$,由$C-B$不等式

$-1\le\dfrac{\vec{x}\cdot\vec{y}}{|\vec{x}||\vec{y}|}\le 1$

定义$\vec{x},\vec{y}$的夹角是$\theta=\arccos\dfrac{\vec{x}\cdot\vec{y}}{|\vec{x}||\vec{y}|},\theta\in[0,\pi]$

注:$\vec{x}\cdot\vec{y}=|\vec{x}||\vec{y}|\cos\theta$

如果$|\vec{x}|=1$,则$\vec{x}\cdot\vec{y}=|\vec{x}||\vec{y}|\cos\theta=|\vec{y}|\cos\theta$ 是$\vec{y}$在$\vec{x}$上投影的长度

【定义 1.3.2】同向，反向

设$\vec{x},\vec{y}\in V\setminus\{\vec{0}\}$,$\vec{x},\vec{y}$的夹角为$\theta$

当$\theta=0$ 时,称$\vec{x},\vec{y}$同向

当$\theta=\pi$时,称$\vec{x},\vec{y}$反向

【例 1.3.1】同向与反向的数学表述

设$\vec{x},\vec{y}\in V\setminus\{\vec{0}\}$,证明:

$(i)\vec{x},\vec{y}$同向$\Leftrightarrow\exists\alpha\in\mathbb{R}^+$,使得$\vec{x}=\alpha\vec{y}$

$(ii)\vec{x},\vec{y}$反向$\Leftrightarrow\exists\alpha\in\mathbb{R}^-$,使得$\vec{x}=\alpha\vec{y}$

证:$(ii)\Rightarrow$:$\vec{x}\cdot\vec{y}=-|\vec{x}||\vec{y}|\Rightarrow|\vec{x}\cdot\vec{y}|=|\vec{x}||\vec{y}|$

$\Rightarrow\vec{x}+\lambda\vec{y}=0$ [命题 1.2]

$\therefore\vec{x}=-\lambda\vec{y}\quad\because\vec{x}\cdot\vec{y}=-|\vec{x}||\vec{y}|\ \therefore-\lambda\vec{y}\cdot\vec{y}=-|\lambda||\vec{y}||\vec{y}|$

$\therefore\dfrac{\lambda}{|\lambda|}=1\Rightarrow\lambda>0$,取$\alpha=-\lambda$即可

$\Leftarrow$:设$\vec{x}=\alpha\vec{y},\vec{x}\cdot\vec{y}=\alpha\vec{y}\cdot\vec{y}\Rightarrow\dfrac{\vec{x}\cdot\vec{y}}{|\vec{x}||\vec{y}|}=\dfrac{\alpha\vec{y}\cdot\vec{y}}{|\alpha||\vec{y}||\vec{y}|}=-1$ ∎

(i)类似

【例 1.3.2】**三角不等式**

设$\vec{x},\vec{y}\in V$,则$|\vec{x}+\vec{y}|\le|\vec{x}|+|\vec{y}|$

等号成立$\Leftrightarrow\vec{x},\vec{y}$中至少有一个为$\vec{0}$或$\vec{x},\vec{y}$同向

证:$|\vec{x}+\vec{y}|^2=(\vec{x}+\vec{y})\cdot(\vec{x}+\vec{y})=|\vec{x}|^2+2(\vec{x}\cdot\vec{y})+|\vec{y}|^2$

$\le|x|^2+2|\vec{x}||\vec{y}|+|\vec{y}|^2=(|\vec{x}|+|\vec{y}|)^2$

$\therefore|\vec{x}+\vec{y}|\le|\vec{x}|+|\vec{y}|$

等号成立$\Leftrightarrow\vec{x}\cdot\vec{y}=|\vec{x}||\vec{y}|\Leftrightarrow\vec{x},\vec{y}$中至少有一个为$\vec{0}$或$\vec{x},\vec{y}$同向 ■

【定义 1.3.3】**正交(垂直)**

设$\vec{x},\vec{y}\in V$,如果$\vec{x}\cdot\vec{y}=0$,则称$\vec{x}$与$\vec{y}$正交$\left(\text{垂直}\right)$

记为$\vec{x}\perp\vec{y}$

注:当$\vec{x},\vec{y}\in V\setminus\{\vec{0}\},\vec{x}\perp\vec{y}\Leftrightarrow\vec{x},\vec{y}$的夹角是$\dfrac{\pi}{2}$ $[\vec{x}\cdot\vec{y}=|\vec{x}||\vec{y}|\cos\theta]$

注:$\vec{0}$与任何向量都正交 [命题 1.1(i)]

【例 1.3.3】**验证标准基相互正交**

$$\text{设}\mathbb{R}^n\text{是标准欧氏空间},\overrightarrow{e_j}=\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 0\\ 1[j\text{行}]\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix},j=1,\dots,n$$

证明$\overrightarrow{e_1},\dots,\overrightarrow{e_n}$两两正交

证:$\vec{e_i}\cdot\vec{e_j}=0\times 0+\cdots+\underbrace{1}_{第i个}\times 0+\cdots+0\times\underbrace{1}_{第j个}+\cdots+0\times 0$

$=\delta_{ij},\qquad i,j\in\{1,\dots,n\}$

$\therefore i\neq j$时 $\vec{e_i}\cdot\vec{e_j}=0,\qquad \vec{e_1},\dots,\vec{e_n}$两两正交 ■

【例 1.3.4】勾股定理

设$\vec{x},\vec{y}\in V$,如果$\vec{x}\perp\vec{y}$,则$|\vec{x}+\vec{y}|^2=|\vec{x}|^2+|\vec{y}|^2$

证:$|\vec{x}+\vec{y}|^2=(\vec{x}+\vec{y})\cdot(\vec{x}+\vec{y})$

$=|\vec{x}|^2+2\vec{x}\cdot\vec{y}+|\vec{y}|^2=|\vec{x}|^2+|\vec{y}|^2$ ■

§1.4 单位正交基

【定义 1.4.1】单位正交基

设V是n维欧氏空间,$\overrightarrow{e_1},\dots,\overrightarrow{e_n}$是$V$的一组基,如果

$(i)\overrightarrow{e_1},\dots,\overrightarrow{e_n}$两两正交

$(ii)\overrightarrow{e_1},\dots,\overrightarrow{e_n}$都是单位向量

则称$\overrightarrow{e_1},\dots,\overrightarrow{e_n}$是$V$的一组单位正交基

注:$(i)(ii)$可简述为 $\overrightarrow{e_i}\cdot\overrightarrow{e_j}=\delta_{ij},\qquad i,j\in\{1,2,\dots,n\}$

注:$\mathbb{R}^n$是标准欧氏空间,其标准基$\overrightarrow{e_1},\dots,\overrightarrow{e_n}$是单位正交基

【命题 1.3】单位正交基与坐标

设$\overrightarrow{e_1},\dots,\overrightarrow{e_n}$是$V$的单位正交基,则

$(i)\forall\vec{x}\in V,\vec{x}=(\vec{x}\cdot\overrightarrow{e_1})\overrightarrow{e_1}+\cdots+(\vec{x}\cdot\overrightarrow{e_n})\overrightarrow{e_n}$

(ii)设$\vec{x}=x_1\overrightarrow{e_1},\dots,x_n\overrightarrow{e_n},\vec{y}=y_1\overrightarrow{e_1}+\cdots+y_n\overrightarrow{e_n}$

则$\vec{x}\cdot\vec{y}=x_1y_1+\cdots+x_ny_n=\begin{pmatrix}x_1 & \cdots & x_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix}=\vec{x}^t\vec{y}$

证:$(i)\vec{x}=\sum_{j=1}^{n}x_j\overrightarrow{e_j},\qquad \overrightarrow{e_i}\cdot\vec{x}=\sum_{j=1}^{n}x_j\overrightarrow{e_i}\cdot\overrightarrow{e_j}=\sum_{j=1}^{n}x_j\delta_{ij}=x_i,i=1,\dots,n$

$\vec{x}=x_1\overrightarrow{e_1}+\cdots+x_n\overrightarrow{e_n}=\vec{x}$

$(ii)\vec{x}\cdot\vec{y}=\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\overrightarrow{e_i}\right)\cdot\left(\sum_{j=1}^{n}y_j\overrightarrow{e_j}\right)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}x_iy_i\delta_{ij}=\sum_{i=1}^{n}x_iy_i\qquad\blacksquare$

【例 1.4.1】正交则线性无关

设$\overrightarrow{v_1},\dots,\overrightarrow{v_s}\in V\setminus\{\vec{0}\}$两两正交，则$\overrightarrow{v_1},\dots,\overrightarrow{v_s}$线性无关

证：法 1: $G(\overrightarrow{v_1},\dots,\overrightarrow{v_s})=\left(\overrightarrow{v_i}\cdot\overrightarrow{v_j}\right)_{\substack{i=1,\dots,s\\ j=1,\dots,s}}$

$=\operatorname{diag}(\overrightarrow{v_1}\cdot\overrightarrow{v_1},\dots,\overrightarrow{v_s}\cdot\overrightarrow{v_s})=\operatorname{diag}(|\overrightarrow{v_1}|^2,\dots,|v_s|^2)$

$\Rightarrow G(\overrightarrow{v_1},\dots,\overrightarrow{v_s})$满秩$\Rightarrow\overrightarrow{v_1},\dots,\overrightarrow{v_s}$线性无关 [定理 1.1]

法 2: 设$\alpha_1,\dots,\alpha_s\in\mathbb{R}$ 使得 $\alpha_1\overrightarrow{v_1}+\cdots+\alpha_s\overrightarrow{v_s}=\vec{0}$

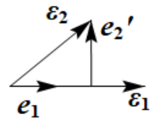
则 $\overrightarrow{v_i}\cdot\left(\sum_{j=1}^{s}\alpha_j\overrightarrow{v_j}\right)=0$，于是$\sum_{j=1}^{s}\alpha_j\left(\overrightarrow{v_i}\cdot\overrightarrow{v_j}\right)=0\Rightarrow\alpha_i(\overrightarrow{v_i}\cdot\overrightarrow{v_i})=0$

$\because\overrightarrow{v_i}\cdot\overrightarrow{v_i}\neq0\ \therefore\alpha_i=0, i=1,\dots,s$

$\Rightarrow\overrightarrow{v_1},\dots,\overrightarrow{v_s}$线性无关 ■

【定理 1.2】Gram-Schmidt 正交化过程

设V是n维欧氏空间，则V有单位正交基



证：设$\overrightarrow{\varepsilon_1},\dots,\overrightarrow{\varepsilon_n}$是$V$的一组基

首先令$\overrightarrow{e_1}=\dfrac{\overrightarrow{\varepsilon_1}}{|\overrightarrow{\varepsilon_1}|}$，则 $\langle\overrightarrow{\varepsilon_1}\rangle=\langle\overrightarrow{e_1}\rangle$

假设对$k, 1\le k<n$，已经得到两两正交的单位向量$\overrightarrow{e_1},\dots,\overrightarrow{e_k}$

使得$\langle\overrightarrow{\varepsilon_1},\dots,\overrightarrow{\varepsilon_k}\rangle=\langle\overrightarrow{e_1},\dots,\overrightarrow{e_k}\rangle$

令$\overrightarrow{e_{k+1}}'=\overrightarrow{\varepsilon_{k+1}}-(\overrightarrow{e_1}\cdot\overrightarrow{\varepsilon_{k+1}})\overrightarrow{e_1}-\cdots-(\overrightarrow{e_k}\cdot\overrightarrow{\varepsilon_{k+1}})\overrightarrow{e_k}$

$\forall i=1,\dots,k\quad\overrightarrow{e_i}\cdot\overrightarrow{e_{k+1}}'=\overrightarrow{e_i}\cdot\overrightarrow{\varepsilon_{k+1}}-(\overrightarrow{e_i}\cdot\overrightarrow{\varepsilon_{k+1}})(\overrightarrow{e_i}\cdot\overrightarrow{e_i})=0$

令$\overrightarrow{e_{k+1}}=\dfrac{\overrightarrow{e_{k+1}}'}{|\overrightarrow{e_{k+1}}'|}$，则$\overrightarrow{e_1},\dots,\overrightarrow{e_{k+1}}$是两两正交的单位向量

可直接验证$\langle\overrightarrow{\varepsilon_1},\dots,\overrightarrow{\varepsilon_k},\overrightarrow{\varepsilon_{k+1}}\rangle=\langle\overrightarrow{e_1},\dots,\overrightarrow{e_k},\overrightarrow{e_{k+1}}\rangle$

当$k=n$时定理即证. ■

注：从$(\overrightarrow{e_1},\dots,\overrightarrow{e_n})$到$(\overrightarrow{\varepsilon_1},\dots,\overrightarrow{\varepsilon_n})$的转换矩阵是上三角的.

【例 1.4.2】求子空间的单位正交基例

设$V=\mathbb{R}^4$,标准欧氏空间

设$\overrightarrow{u_1}=\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix},\overrightarrow{u_2}=\begin{pmatrix}0\\-1\\1\\-1\end{pmatrix},\overrightarrow{u_3}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$,且$U=\langle\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2},\overrightarrow{u_3}\rangle$

计算U的一组单位正交基

解: $\dim U=\operatorname{rank}(\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2},\overrightarrow{u_3})=\operatorname{rank}\begin{pmatrix}1&0&1\\0&-1&1\\1&1&1\\0&-1&1\end{pmatrix}=3$

$$\overrightarrow{e_1}=\frac{\overrightarrow{u_1}}{|\overrightarrow{u_1}|}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{e_2}'=\overrightarrow{u_2}-(\overrightarrow{u_2}\cdot\overrightarrow{e_1})\overrightarrow{e_1}=\begin{pmatrix}-1/2\\-1\\1/2\\-1\end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{e_2}=\frac{\overrightarrow{e_2}'}{|\overrightarrow{e_2}'|}=\frac{1}{\sqrt{10}}\begin{pmatrix}-1\\-2\\1\\-2\end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{e_3}'=\overrightarrow{u_3}-(\overrightarrow{u_3}\cdot\overrightarrow{e_1})\overrightarrow{e_1}-(\overrightarrow{u_3}\cdot\overrightarrow{e_2})\overrightarrow{e_2}=\begin{pmatrix}-2/5\\1/5\\2/5\\1/5\end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{e_3}=\frac{\overrightarrow{e_3}'}{|\overrightarrow{e_3}'|}=\frac{1}{\sqrt{10}}\begin{pmatrix}-2\\1\\2\\1\end{pmatrix}$$

$U=\langle\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2},\overrightarrow{e_3}\rangle,\qquad \overrightarrow{e_\imath}\cdot\overrightarrow{e_\jmath}=\delta_{ij}$

即$\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2},\overrightarrow{e_3}$是$U$的一组单位正交基

§1.5 正交矩阵

【例 1.5.1】正交矩阵的由来

设$\overrightarrow{e_1},\dots,\overrightarrow{e_n}$; $\overrightarrow{\varepsilon_1},\dots,\overrightarrow{\varepsilon_n}$是$V$的两组单位正交基

设$A\in GL_n(\mathbb{R})$, 使得 $(\overrightarrow{\varepsilon_1},\dots,\overrightarrow{\varepsilon_n})=(\overrightarrow{e_1},\dots,\overrightarrow{e_n})A$

$\overrightarrow{\varepsilon_j}=(\overrightarrow{e_1},\dots,\overrightarrow{e_n})\overrightarrow{A^{(j)}}$

$\delta_{ij}=\overrightarrow{\varepsilon_i}\cdot\overrightarrow{\varepsilon_j}=\left[(\overrightarrow{e_1},\dots,\overrightarrow{e_n})\overrightarrow{A^{(i)}}\right]\cdot\left[(\overrightarrow{e_1},\dots,\overrightarrow{e_n})\overrightarrow{A^{(j)}}\right]$

$=\left(\overrightarrow{A^{(i)}}\right)^t\overrightarrow{A^{(j)}}=\overrightarrow{(A^t)_i}\overrightarrow{A^{(j)}}\quad,\forall i,j\in\{1,\dots,n\}\ \left[\left(\overrightarrow{A^{(i)}}\right)^t=\overrightarrow{(A^t)_i}\right]$

即$A^tA=E$, 于是$A^t=A^{-1}$

【定义 1.5.1】正交矩阵

设$A\in GL_n(\mathbb{R})$, 如果$A^t=A^{-1}$, 则称A是正交矩阵

【定理 1.3】正交矩阵的判定

设V的一组单位正交基是$\overrightarrow{e_1},\dots,\overrightarrow{e_n}$, 而$\overrightarrow{\varepsilon_1},\dots,\overrightarrow{\varepsilon_n}$是$V$的另一组基

$(\overrightarrow{\varepsilon_1},\dots,\overrightarrow{\varepsilon_n})=(\overrightarrow{e_1},\dots,\overrightarrow{e_n})A, A\in GL_n(\mathbb{R})$

则$\overrightarrow{\varepsilon_1},\dots,\overrightarrow{\varepsilon_n}$是单位正交基 $\Leftrightarrow$ A是正交矩阵

证: $\Rightarrow$ 上文已证

$\Leftarrow$: $\overrightarrow{\varepsilon_j}=(\overrightarrow{e_1},\dots,\overrightarrow{e_n})\overrightarrow{A^{(j)}}, j=1,\dots,n$

$\overrightarrow{\varepsilon_i}\cdot\overrightarrow{\varepsilon_j}=\left((\overrightarrow{e_1},\dots,\overrightarrow{e_n})\overrightarrow{A^{(i)}}\right)\cdot\left((\overrightarrow{e_1},\dots,\overrightarrow{e_n})\overrightarrow{A^{(i)}}\right)$

$=\left(\vec{A}^{(i)}\right)^t\overrightarrow{A^{(j)}}=\overrightarrow{(A^t)_i}\overrightarrow{A^{(j)}}=\delta_{ij}\quad[\because A^tA=E]$ ■

【例 1.5.1】正交矩阵的具体形式

一阶: $(a)=(a)^t$

$(a)(a)^t=(1)\Leftrightarrow a^2=1\Rightarrow a=\pm1\ \therefore (1)$或$(-1)$

二阶:

$A_2=\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}, B_2=\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ \sin\theta & -\cos\theta\end{pmatrix}$

$B_2^tB_2=\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ \sin\theta & -\cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ \sin\theta & -\cos\theta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$

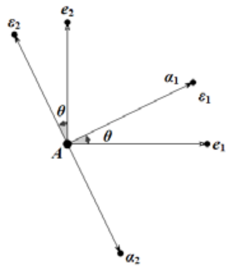
$(\overrightarrow{\varepsilon_1},\overrightarrow{\varepsilon_2})=(\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2})A_2 \quad (\overrightarrow{\alpha_1},\overrightarrow{\alpha_2})=(\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2})B_2$

n阶:

$A^tA=E\Leftrightarrow \overrightarrow{(A^t)_\iota}\overrightarrow{A^{(J)}}=\delta_{ij},\qquad i,j\in\{1,\dots,n\}$

$\Leftrightarrow \left(\overrightarrow{A^{(\iota)}}\right)^t\overrightarrow{A^{(J)}}=\delta_{ij}\Leftrightarrow \overrightarrow{A^{(\iota)}}\cdot\overrightarrow{A^{(J)}}=\delta_{ij}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{A^{(1)}},\dots,\overrightarrow{A^{(n)}}$是$\mathbb{R}^n$在标准内积下的单位正交基



【命题 1.4】正交矩阵的性质

设A是正交矩阵, 则

$(i)\det A=\pm1$

$(ii)A^t,A^{-1}$也是正交矩阵

(iii)若B也是正交矩阵, 则AB也是正交矩阵

证: $(i)A^tA=E\Rightarrow\det(A^tA)=1\Rightarrow\det A^t\det A=1$

$\Rightarrow(\det A)^2=1\Rightarrow\det A=\pm1$

$(ii)A^t=A^{-1}\Rightarrow AA^t=E\Rightarrow(A^t)^tA^t=E\Rightarrow A^t$正交

$(iii)(AB)^t(AB)=(B^tA^t)(AB)=B^t(A^tA)B=B^tEB=B^tB=E$ ■

【推论 1.1】正交矩阵群

令$O_n(\mathbb{R}) = \left\{A \in GL_n(\mathbb{R}) \middle| A\text{正交}\right\}$, 则$O_n(\mathbb{R})$是$GL_n(\mathbb{R})$的子群

证: 由上学期第四章命题 2.2, 只要证明$\forall A, B \in O_n(\mathbb{R}), AB^{-1} \in O_n(\mathbb{R})$

由命题 1.4 (ii), $B^{-1} \in O_n(\mathbb{R})$

命题 1.4(iii), $AB^{-1} \in O_n(\mathbb{R})$ ■

注: 称$O_n(\mathbb{R})$为n阶正交矩阵群

§1.6 正交相似

设$\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V), \overrightarrow{e_1}, \dots, \overrightarrow{e_n}; \overrightarrow{\varepsilon_1}, \dots, \overrightarrow{\varepsilon_n}$是$V$的两组单位正交基

$(\overrightarrow{\varepsilon_1}, \dots, \overrightarrow{\varepsilon_n}) = (\overrightarrow{e_1}, \dots, \overrightarrow{e_n})P$, 则$P \in O_n(\mathbb{R})$

设$\mathcal{A}$在$\overrightarrow{e_1}, \dots, \overrightarrow{e_n}$下的矩阵为$A$, 在$\overrightarrow{\varepsilon_1}, \dots, \overrightarrow{\varepsilon_n}$的矩阵为$B$

由第二章§2.1, $B = P^{-1}AP = P^tAP$

【定义 1.6.1】正交相似

设$A, B \in M_n(\mathbb{R})$, 如果存在$P \in O_n(\mathbb{R})$, 使得$B = P^{-1}AP$

则称B与A正交相似, 记为$A\sim_o B$

注: 如果$A\sim_o B$, 则$A\sim_s B$且$A\sim_c B$, 逆命题一般不真

目标: 给定$A \in M_n(\mathbb{R})$, 求A在正交相似下的标准型

【命题 1.4】正交相似是等价关系

$\sim_o$是等价关系

证: 取$P = E$, 则 $A = P^{-1}AP \Rightarrow A\sim_o A$ [自反性]

若$B = P^{-1}AP, P \in O_n(\mathbb{R})$ 则$A = PBP^{-1}$

取$Q = P^{-1} \in O_n(\mathbb{R})$ 则$A = Q^{-1}BQ$ [对称性]

若$B = P^{-1}AP, C = Q^{-1}BQ, \quad P, Q \in O_n(\mathbb{R})$

则$C = Q^{-1}P^{-1}APQ = (PQ)^{-1}A(PQ)$

$\because PQ \in O_n(\mathbb{R})$ $\therefore A\sim_o C$ [传递性] ■

§1.7 正交补

【定义 1.7.1】正交补

设$U \subset V$是子空间,U的正交补 $U^{\perp} = \{\vec{v} \in V | \forall \vec{u} \in U, \vec{v} \perp \vec{u}\}$

【命题 1.5】正交补的基本性质

设$U \subset V$是子空间,则

$(i) U^{\perp}$是子空间

$(ii) V = U \oplus U^{\perp}$

$(iii) (U^{\perp})^{\perp} = U$

证:(i)设$\vec{v}, \vec{u} \in U^{\perp}$,　　$\alpha, \beta \in F$

$\forall \vec{u} \in U, (\alpha\vec{v} + \beta\vec{w}) \cdot \vec{u} = \alpha\vec{v} \cdot \vec{u} + \beta\vec{w} \cdot \vec{u} = 0$

$\Rightarrow \alpha\vec{v} + \beta\vec{w} \in U^{\perp}$,　　$U^{\perp}$是子空间

(ii)设$\overrightarrow{\varepsilon_1}, \dots, \overrightarrow{\varepsilon_d}$是$U$的一组基,扩充为$V$的一组基$\overrightarrow{\varepsilon_1}, \dots, \overrightarrow{\varepsilon_d}, \overrightarrow{\varepsilon_{d+1}}, \dots, \overrightarrow{\varepsilon_n}$

对这组基应用$Gram - Schmidt$正交化,得到V的单位正交基

$\overrightarrow{e_1}, \dots, \overrightarrow{e_d}, \overrightarrow{e_{d+1}}, \dots, \overrightarrow{e_n}$

且$U = \langle \overrightarrow{\varepsilon_1}, \dots, \overrightarrow{\varepsilon_d} \rangle = \langle \overrightarrow{e_1}, \dots, \overrightarrow{e_d} \rangle$

于是$\forall j \in \{d+1, \dots, n\}, \overrightarrow{e_j} \in U^{\perp} \Rightarrow \dim U^{\perp} \geq n - d$

设$\vec{v} \in U \cap U^{\perp} \Rightarrow \vec{v} \cdot \vec{v} = 0 \Rightarrow \vec{v} = \vec{0}$　[命题 1.1]

$\Rightarrow V = U \oplus U^{\perp}$

$U + U^{\perp} = U \oplus U^{\perp}, \dim(U \oplus U^{\perp}) = \dim U + \dim U^{\perp} = d + n - d = n$

(iii)设$\dim U = d$,由(ii),$\dim U^{\perp} = n - d$

再用(ii),$\dim(U^{\perp})^{\perp} = d$

可用定义验证 $U \subset (U^{\perp})^{\perp}$,于是$U = (U^{\perp})^{\perp}$　■

【例 1.7.1】求正交补例

设$V=\mathbb{R}^4$是标准欧氏空间

设$\overrightarrow{u_1}=\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix},\overrightarrow{u_2}=\begin{pmatrix}0\\-1\\1\\-1\end{pmatrix},\overrightarrow{u_3}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$

求$\mathbb{R}^4$的一组单位正交基 $\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2},\overrightarrow{e_3},\overrightarrow{e_4}$

使得$\langle\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2},\overrightarrow{e_3}\rangle=\langle\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2},\overrightarrow{u_3}\rangle$

解: 由前例

$$\overrightarrow{e_1}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix},\overrightarrow{e_2}=\frac{1}{\sqrt{10}}\begin{pmatrix}-1\\-2\\1\\-2\end{pmatrix},\overrightarrow{e_3}=\frac{1}{\sqrt{10}}\begin{pmatrix}-2\\1\\2\\1\end{pmatrix}$$

下面计算$\vec{w}\in\underbrace{\langle\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2},\overrightarrow{u_3}\rangle}_{U}{}^{\perp}\setminus\{\vec{0}\}$

$\vec{w}\in U^{\perp}\Leftrightarrow\vec{w}\cdot\overrightarrow{u_1}=\vec{w}\cdot\overrightarrow{u_2}=\vec{w}\cdot\overrightarrow{u_3}=0$

设$\vec{w}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}$, 则$\begin{pmatrix}1&0&1&0\\0&-1&1&-1\\1&1&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$

$$\Rightarrow\vec{w}\in\left\langle\begin{pmatrix}0\\1\\0\\-1\end{pmatrix}\right\rangle,U^{\perp}=\langle\vec{w}\rangle,\overrightarrow{e_4}=\frac{\vec{w}}{|\vec{w}|}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\1\\0\\-1\end{pmatrix}$$

【推论 1.2】正交基扩充定理

设$\overrightarrow{v_1},\dots,\overrightarrow{v_s}\in V$两两正交, 则$\exists\overrightarrow{v_{s+1}},\dots,\overrightarrow{v_n}\in V$

使得$\overrightarrow{v_1},\dots,\overrightarrow{v_s},\overrightarrow{v_{s+1}},\dots,\overrightarrow{v_n}$是$V$的一组基且两两正交

证: 设$U=\langle\overrightarrow{v_1},\dots,\overrightarrow{v_s}\rangle$, 由命题 1.3 后的例子可知

$\dim U=s$, 由命题 1.5(ii), $\dim U^{\perp}=n-s$

由定理 1.2 $U^{\perp}$有一组基 $\overrightarrow{v_{s+1}},\dots,\overrightarrow{v_n}$两两正交

由命题 1.5(ii) $\overrightarrow{v_1},\dots,\overrightarrow{v_s},\overrightarrow{v_{s+1}},\dots,\overrightarrow{v_n}$是$V$的一组基

且$\overrightarrow{v_i}\perp\overrightarrow{v_j}$ $,i,j\in\{1,\dots,n\},i\neq j$ ■

【例 1.7.2】求单位正交基例

设W是$\begin{cases}x_1+x_2-x_3=0\\ 2x_1+3x_3=0\end{cases}$在$\mathbb{R}^3$中的解空间

求$W^{\perp}$的一组单位正交基 $\left(\mathbb{R}^3\text{是标准欧氏空间}\right)$

解:$\underbrace{\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ 2 & 0 & 3\end{pmatrix}}_{A}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}$

$$W^{\perp}=\left\langle\overrightarrow{\varepsilon_1}=\begin{pmatrix}1\\ 1\\ -1\end{pmatrix},\overrightarrow{\varepsilon_2}=\begin{pmatrix}2\\ 0\\ 3\end{pmatrix}\right\rangle$$

$$\overrightarrow{e_1}=\frac{\overrightarrow{\varepsilon_1}}{|\overrightarrow{\varepsilon_1}|}=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\ 1\\ -1\end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{e_2}'=\overrightarrow{\varepsilon_2}-(\overrightarrow{\varepsilon_2}\cdot\overrightarrow{e_1})\overrightarrow{e_1}=\begin{pmatrix}7/3\\ 1/3\\ 8/3\end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{e_2}=\frac{1}{\sqrt{114}}\begin{pmatrix}7\\ 1\\ 8\end{pmatrix}$$

§2 正规算子与正规矩阵

§2.1 伴随算子

【定义 2.1.1】伴随算子

设V是n维标准欧氏空间,$\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$,设$\mathcal{A}^* \in \mathcal{L}(V)$

使得$\forall \vec{x},\vec{y} \in V, \mathcal{A}(\vec{x}) \cdot \vec{y} = \vec{x} \cdot \mathcal{A}^*(\vec{y})$对称

则称$\mathcal{A}^*$是$\mathcal{A}$的伴随算子

【例 2.1.1】伴随算子的来历

$\varphi: V \to V^*, \vec{v} \mapsto L_{\vec{v}}$

$L_{\vec{v}}: V \to \mathbb{R}, \vec{x} \mapsto \vec{v} \cdot \vec{x}$

由内积的双线性性可知$L_{\vec{v}} \in V^*$且φ是线性映射

若$\varphi(\vec{v}) = O^*, L_{\vec{v}}(\vec{u}) = 0 \Leftrightarrow \forall \vec{u} \in V, L_{\vec{v}}(\vec{u}) = \vec{v} \cdot \vec{u} = 0$

$\therefore \vec{v} = \vec{0} \Leftrightarrow \ker \varphi = \{\vec{0}\} \Leftrightarrow \varphi$是线性同构

$\mathcal{A}: V \to V \quad \hat{\mathcal{A}}: V^* \to V^*$是$\mathcal{A}$的对偶算子

则$\mathcal{A}^* = \varphi^{-1} \circ \hat{\mathcal{A}} \circ \varphi$

$$\begin{tikzcd} V^* \arrow[r, "\mathcal{A}^*"] & V^* \arrow[d, "\varphi^{-1}"] \\ V \arrow[u, "\varphi"] \arrow[r, "\mathcal{A}"] & V \end{tikzcd}$$

【定理 2.1】伴随算子的唯一性及其矩阵

设$\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$,则

$(i)\mathcal{A}$的伴随算子存在且唯一

(ii)设$\overrightarrow{e_1},\dots,\overrightarrow{e_n}$是$V$的一组单位正交基,且$\mathcal{A}$在$\overrightarrow{e_1},\dots,\overrightarrow{e_n}$下的矩阵为$A$

则$\mathcal{A}$的伴随算子在$\overrightarrow{e_1},\dots,\overrightarrow{e_n}$下的矩阵为$A^t$

证:设$\mathcal{A}^* \in \mathcal{L}(V)$,由公式$\left(\mathcal{A}^*(\overrightarrow{e_1}),\dots,\mathcal{A}^*(\overrightarrow{e_n})\right) = (\overrightarrow{e_1},\dots,\overrightarrow{e_n})A^t$确定

则$\mathcal{A}^*(\overrightarrow{e_i}) = (\overrightarrow{e_1}, \dots, \overrightarrow{e_n})\overrightarrow{A^{t(i)}} = (\overrightarrow{e_1}, \dots, \overrightarrow{e_n})\left(\overrightarrow{A_i}\right)^t$

$\mathcal{A}^*(\overrightarrow{e_i}) \cdot \overrightarrow{e_j} = \left[(\overrightarrow{e_1}, \dots, \overrightarrow{e_n})\left(\overrightarrow{A_i}\right)^t\right] \cdot \overrightarrow{e_j}$

$= \overrightarrow{A_i} \cdot \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1[\text{第}j\text{个}] & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}^t = a_{ij} \quad [*]$

同理,$\overrightarrow{e_i} \cdot \mathcal{A}\left(\overrightarrow{e_j}\right) = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1[\text{第}i\text{个}] & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}\overrightarrow{A^{(j)}} = a_{ij} \quad [**]$

由[*],[**]得到 $\mathcal{A}^*(\overrightarrow{e_i}) \cdot \overrightarrow{e_j} = \overrightarrow{e_i} \cdot \mathcal{A}\left(\overrightarrow{e_j}\right) = a_{ij}$

设$\vec{x} = x_1\overrightarrow{e_1} + \cdots + x_n\overrightarrow{e_n}, \vec{y} = y_1\overrightarrow{e_1} + \cdots + y_n\overrightarrow{e_n}$

$$\mathcal{A}^*(\vec{x}) \cdot \vec{y} = \mathcal{A}^*\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\overrightarrow{e_i}\right) \cdot \vec{y} = \sum_{i=1}^{n} x_i(\mathcal{A}^*(\overrightarrow{e_i}) \cdot \vec{y})$$

$$= \sum_{i=1}^{n} x_i\left[\mathcal{A}^*(\overrightarrow{e_i}) \cdot \left(\sum_{j=1}^{n} y_j\overrightarrow{e_j}\right)\right] = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i y_i\left(\mathcal{A}^*(\overrightarrow{e_i}) \cdot \overrightarrow{e_j}\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i y_i a_{ij}, \qquad \text{同理}, \vec{x} \cdot \mathcal{A}(\vec{y}) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i y_i a_{ij}$$

于是 $\mathcal{A}^*(\vec{x}) \cdot \vec{y} = \vec{x} \cdot \mathcal{A}(\vec{y})$, $\mathcal{A}^*$的存在性和(i)得证

唯一性: 设$\mathcal{B}^* \in \mathcal{L}(V)$是$\mathcal{A}$的另一个伴随算子, 则

$\mathcal{B}^*(\overrightarrow{e_i}) \cdot \overrightarrow{e_j} = \overrightarrow{e_i} \cdot \mathcal{A}\left(\overrightarrow{e_j}\right) = a_{ij} \quad [**]$

由命题 1.3(i),$\mathcal{B}^*(\overrightarrow{e_i})$在$\overrightarrow{e_1}, \dots, \overrightarrow{e_n}$下的第$j$个坐标是$a_{ij}$

于是$\mathcal{B}^*$在$\overrightarrow{e_1}, \dots, \overrightarrow{e_n}$下的矩阵也是$A^t$ ■

【定义 2.1.2】正规算子 正规矩阵

设$\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$,$\mathcal{A}^*$是$\mathcal{A}$伴随算子，如果$\mathcal{A} \circ \mathcal{A}^* = \mathcal{A}^* \circ \mathcal{A}$

则称$\mathcal{A}$是正规$(normal)$算子

设$A \in M_n(\mathbb{R})$, 如果$AA^t = A^tA$, 则称A是正规矩阵

注：设$\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$,$\mathcal{A}$在$V$的某组正交基下的矩阵是$A$

则A正规 $\Leftrightarrow$ $\mathcal{A}$正规

【例 2.1.2】正规的三个重要子类

设$A \in M_n(\mathbb{R})$, 如果A对称或斜对称或正交, 则A是正规的

证: 对称 $\Rightarrow A = A^t \Rightarrow AA^t = A^tA$

斜对称 $\Rightarrow A = -A^t \Rightarrow AA^t = -A^2 = A^tA$

正交 $\Rightarrow A^t = A^{-1} \Rightarrow AA^t = E = A^tA$ ■

【引理 2.1】hand waiving

设$A \in \mathbb{R}^{m\times n}, \operatorname{tr} AA^t = 0 \Rightarrow A = O_{m\times n}$

证: 第九周习题五

【引理 2.2】柯 P64 定理 7

设W是 $\mathbb{R}$ 上的n维线性空间, 设$\mathcal{A} \in \mathcal{L}(W)$

则W有 1 维或 2 维不变子空间

证: 由 $\mathbb{R}[t]$中因式分解可知, $\mu_{\mathcal{A}}(t) = p(t)q(t)$

其中$p, q \in \mathbb{R}[t], 0 < \deg p \leq 2$

$\because \deg q < \deg \mu_{\mathcal{A}} \quad \therefore \exists \vec{x} \in W$ 使得$q(\mathcal{A})(\vec{x}) \neq 0$

令$\vec{y} = q(\mathcal{A})(\vec{x}) \neq 0$, 设$U = \mathbb{R}[\mathcal{A}] \cdot \vec{y}$

$p(\mathcal{A})(\vec{y}) = p(\mathcal{A})q(\mathcal{A})\vec{x} = pq(\mathcal{A})\vec{x} = \mu_{\mathcal{A}}(\vec{x}) = 0 \Rightarrow \mu_{\mathcal{A}_{\vec{y}}} \big| p$

$\Rightarrow \deg \mu_{\mathcal{A},\vec{y}} \leq 2 \Rightarrow 0 < \dim U \leq 2$ [第二章命题 5.4(ii)]

又因为 $\mathbb{R}[\mathcal{A}] \cdot \vec{y}$是$\mathcal{A}-$不变的, 所以引理成立 ■

§2.2 正规矩阵的标准型

【引理 2.3】上三角分块正规矩阵对角

设$A \in M_n(\mathbb{R})$正规

A可表为$\begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ O & A_3 \end{pmatrix}$的形式,$A_1 \in M_d(\mathbb{R}), 0 < d < n$

则$A_2 = O_{d\times(n-d)}$

证: 正规 $\Rightarrow A^tA = AA^t \Rightarrow \begin{pmatrix} A_1^t & O \\ A_2^t & A_3^t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ O & A_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ O & A_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_1^t & O \\ A_2^t & A_3^t \end{pmatrix}$

由此 $A_1^tA_1 = A_1A_1^t + A_2A_2^t$

$\mathrm{tr}(A_1^tA_1) = \mathrm{tr}(A_1A_1^t + A_2A_2^t) = \mathrm{tr}(A_1A_1^t) + \mathrm{tr}(A_2A_2^t)$

$\Rightarrow \mathrm{tr}(A_2A_2^t) = 0$

由引理 2.1 $A_2 = O_{d\times(n-d)}$ ■

【引理 2.4】正交补保持不变子空间

设$\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$正规, 如果$U \subseteq V$是$\mathcal{A}-$不变子空间

则$U^\perp$也是$\mathcal{A}-$不变子空间

证: 设$\overrightarrow{e_1}, \dots, \overrightarrow{e_d}$是$U$的一组单位正交基

由命题 1.5(ii) $\dim U^\perp = n - d$

设$U^\perp$的一组单位正交基是$\overrightarrow{e_{d+1}}, \dots, \overrightarrow{e_n}, n = \dim V$

则$\overrightarrow{e_1}, \dots \overrightarrow{e_d}, \overrightarrow{e_{d+1}}, \dots, \overrightarrow{e_n}$是$V$的单位正交基

设A是$\mathcal{A}$在$\overrightarrow{e_1}, \dots, \overrightarrow{e_n}$下的矩阵, 则

$A = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ O & A_3 \end{pmatrix}, A_1 \in M_d(\mathbb{R})$ [第二章定理 3.1]

由定理 2.3 A是正规矩阵 $\Rightarrow A_2 = O$

由第二章定理 3.2 及其证明, $U^\perp$是$\mathcal{A}-$不变的 ■

【引理 2.5】正规算子正交补直和二维分解

设$\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$正规,则存在$\mathcal{A}-$不可分子空间$U_1, \dots, U_l$

使得$(i) V = U_1 \oplus \cdots \oplus U_l$

$(ii) \forall i, j \in \{1, \dots, l\}, i \neq j, \quad \forall \overrightarrow{u_i} \in U_i, \overrightarrow{u_j} \in U_j, \quad \overrightarrow{u_i} \perp \overrightarrow{u_j}$

此性质记为$U_i \perp U_j$

$(iii) 0 < \dim U_i \leq 2, i = 1, \dots, l$

证:设$n = \dim V$,对n归纳, $n = 1$ 时显然

当$n = 2$ 时,如果V是$\mathcal{A}-$不可分的,则引理成立

否则,存在 1 维$\mathcal{A}-$子空间U,由引理 2.4,$U^{\perp}$也是$\mathcal{A}-$子空间

由$V = U \oplus U^{\perp}$ 引理成立

设$\dim V < n$时引理成立,考虑$\dim V = n$且$n \geq 3$ 的情形

由引理 2.2,V有一个$\mathcal{A}$不变子空间U,维数为 1 或 2

由引理 3.4,$U^{\perp}$是$\mathcal{A}-$不变的

由命题 1.5(ii),$V = U \oplus U^{\perp}$

设$\overrightarrow{e_1}, \dots, \overrightarrow{e_d}$是$U$的单位正交基$(d = 1$ 或 $2)$

$\overrightarrow{e_{d+1}}, \dots, \overrightarrow{e_n}$是$U^{\perp}$的单位正交基

则$\mathcal{A}$在$\overrightarrow{e_1}, \dots, \overrightarrow{e_n}$下的矩阵是$A = \begin{pmatrix} A_1 & O \\ O & A_2 \end{pmatrix}$,其中$A_1 \in M_d(\mathbb{R})$

$\because AA^t = A^tA$,所以$A_i^tA_i = A_iA_i^t, i = 1,2$

$\Rightarrow \mathcal{A}\big|_U$和$\mathcal{A}\big|_{U^{\perp}}$都是正规的

对$\mathcal{A}\big|_U, U$用$n = 1$ 或$n = 2$ 的结论,对$\mathcal{A}\big|_{U^{\perp}}, U^{\perp}$用归纳假设即可 ■

【例 2.2.1】二维正规矩阵的形式

$n = 1, A \in M_n(\mathbb{R})$正规,$A = (\alpha)$正规

$n = 2, A \in M_n(\mathbb{R})$正规,考虑$\dim V = 2, \mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$,且$V$是不可分的

设$\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2}$是$V$的一组单位正交基

则$\exists\alpha,\beta\in\mathbb{R},\beta\neq 0$ 使得$\mathcal{A}$在$\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2}$下的矩阵为$\begin{pmatrix}\alpha & -\beta\\ \beta & \alpha\end{pmatrix}$

证: 设$\mathcal{A}$在$\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2}$下的矩阵是$A=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix},a,b,c,d\in\mathbb{R}$

由$A^tA=AA^t$,得到$\begin{cases}a^2+b^2=a^2+c^2\\ ab+cd=ac+bd\\ b^2+d^2=c^2+d^2\end{cases}$

由第一式,$c^2=b^2\Rightarrow c=b$或$c=-b$

情形 1 $c=b$

$A=\begin{pmatrix}a & b\\ b & d\end{pmatrix},\mathcal{X}_A=t^2+(a+d)t+ad-b^2$

$\Delta=(a-d)^2+4b^2\geq 0\Rightarrow\mathcal{X}_A$有实根$\Rightarrow\mathcal{A}$有一维不变子空间

由命题 1.5 和引理 2.4,V是A可分的,矛盾

情形 2 $c=-b$且$b\neq 0$

由第二式,得到$a=d$,令$a=\alpha,b=-\beta$,得$A=\begin{pmatrix}\alpha & -\beta\\ \beta & \alpha\end{pmatrix}$

可直接验证A是正规的 ■

【定义 2.2.1】2 阶正规块

设$\alpha,\beta\in\mathbb{R}$,记$N_2(\alpha,\beta)=\begin{pmatrix}\alpha & -\beta\\ \beta & \alpha\end{pmatrix}$,称为一个 2 阶正规块

注: $N_2(\alpha,\beta)$无实特征根

【定理 2.2】正规算子的规范型

设$\mathcal{A}\in\mathcal{L}(V)$正规

则存在V的一组单位正交基$\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2},\dots,\overrightarrow{e_{2s-1}},\overrightarrow{e_{2s}},\overrightarrow{e_{2s+1}},\dots,\overrightarrow{e_n}$

使得$\mathcal{A}$在该基下的矩阵为 $\operatorname{diag}(N_2(\alpha_1,\beta_1),\dots,N_2(\alpha_s,\beta_s),\lambda_{2s+1},\dots,\lambda_n)$

证: 由引理 2.5

$V = U_1 \oplus \cdots \oplus U_s \oplus U_{2s+1} \oplus \cdots \oplus U_n \quad [*]$

其中$U_1, \dots, U_s$是 2 维$\mathcal{A}-$子空间,$U_{2s+1}, \dots, U_n$是 1 维$\mathcal{A}-$子空间

且$U_i \perp U_j, i \neq j, i, j \in \{1, \dots, s, 2s+1, \dots, n\}$

设$\overrightarrow{e_{2_i-1}}, \overrightarrow{e_{2i}}$是$U_i$的单位正交基,$i = 1, \dots, s$

$\overrightarrow{e_j}$是U_j的单位正交基,$j = 2s+1, \dots, n$

由上述例子$\mathcal{A}\big|_{U_i}$上的矩阵为$N_2(\alpha_i, \beta_i)$, 其中$\alpha_i, \beta_i \in \mathbb{R}, \beta_i \neq 0$

$\mathcal{A}\big|_{U_j}$上的矩阵为λ_j, 由$[*]$定理成立 ■

【定理 2.3】正规矩阵的规范型

设$A \in M_n(\mathbb{R})$正规, 则$A \sim_{\mathrm{o}} \mathrm{diag}(N_2(\alpha_1, \beta_1), \dots, N_2(\alpha_s, \beta_s), \lambda_{2s+1}, \dots, \lambda_n)$

证: 设A是$\mathcal{A}$在某组单位正交基B_1下的矩阵, 则$\mathcal{A}$正规

由定理 2.2,$\mathcal{A}$在某组单位正交基B_2下的矩阵为

$A' = \mathrm{diag}(N_2(\alpha_1, \beta_1), \dots, N_2(\alpha_s, \beta_s), \lambda_{2s+1}, \dots, \lambda_n)$

则$A \sim_o A'$ ■

§3 特殊正规矩阵

§3.1 实对称矩阵

一阶 (α)　　二阶 $N_2(\alpha,\beta)=\begin{pmatrix}\alpha & -\beta\\ \beta & \alpha\end{pmatrix},\beta\neq 0$

A正规 $\Rightarrow A\sim_o B:=\operatorname{diag}(N_2(\alpha_1,\beta_1),\dots,N_2(\alpha_s,\beta_s),\lambda_{2s+1},\dots,\lambda_n)$

【定理 3.1】实对称矩阵的正交规范型

设$A\in M_n(\mathbb{R})$对称, 则$A\sim_o \operatorname{diag}(\alpha_1,\dots,\alpha_n)$

其中$\alpha_1,\dots,\alpha_n$是A的特征根, 特别地, 实对称方阵的特征根都是实数

证: 因为A对称, 所以A正规

由定理 2.2, $A\sim_o B$, 即$\exists P\in O_n(\mathbb{R})$使得$B=P^tAP=P^{-1}AP$

$\Rightarrow B\sim_c A\Rightarrow B$对称 $\Rightarrow s=0$

于是$B=\operatorname{diag}(\lambda_1,\dots,\lambda_n)$ 且$\lambda_1,\dots,\lambda_n$是$A$的特征根, 且$\lambda_1,\dots,\lambda_n\in\mathbb{R}$

$B\sim_s A\Rightarrow A$的特征根都是实数　■

【推论 3.1】正定性与特征根正负的联系

设$A\in M_n(\mathbb{R})$对称, $(i)A$正定 $\Leftrightarrow A$的特征根都为正实数

$(ii)A$半正定 $\Leftrightarrow A$的特征根都是非负实数

证: $(i)\because A$对称　$\therefore A\sim_o \operatorname{diag}(\alpha_1,\dots,\alpha_n)$

于是 $\operatorname{diag}(\alpha_1,\dots,\alpha_n)$ 正定, $\alpha_1,\dots,\alpha_n$为A的特征根

由此可知, $\alpha_1,\dots,\alpha_n\in\mathbb{R}^+$ $\left[\text{惯性定理或}Sylvester\text{判别法}\right]$

(ii)类似　■

§3.2 斜对称矩阵

$N_2(\alpha,\beta)$斜对称 $\Leftrightarrow \alpha=0$

【定理 3.2】斜对称矩阵的正交规范型

设$A\in M_n(\mathbb{R})$斜对称, 则$A\sim_o \operatorname{diag}(N_2(0,\beta_1),\dots,N_2(0,\beta_S),0,\dots,0)$

其中$\beta_1,\dots,\beta_s\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$

特别地, A的特征根都是纯虚数或 0

证: 类似定理 3.1 证明, $A\sim_o B\Rightarrow B$斜对称 $\Rightarrow \alpha_1=\cdots=\alpha_s=0$

$A\sim_o B\Rightarrow A\sim_s B\Rightarrow \mathcal{X}_A=\mathcal{X}_B=|tE-B|=\mathcal{X}_{N_2(0,\beta_1)}\cdots\mathcal{X}_{N_2(0,\beta_s)}t^{n-2s}$

$=(t+\beta_1^2)\cdots(t+\beta_s^2)t^{n-2s}$

由此可知A的特征根 是$\pm\beta_1\sqrt{-1},\dots,\pm\beta_s\sqrt{-1}$和 0 ■

§3.3 正交矩阵

一阶正交矩阵$(1),(-1)$

设$N_2(\alpha,\beta)$是正交的,即$\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ -\beta & \alpha\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha & -\beta\\ \beta & \alpha\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$

$\Rightarrow \alpha^2+\beta^2=1$ 且$\beta\neq 0$

令$\beta=\sin\theta,\theta\neq k\pi,k\in\mathbb{Z}$则可取$\alpha=\cos\theta$

$N_2(\alpha,\beta)=\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$

【定理 3.3】正交矩阵的正交规范型

设$A\in M_n(\mathbb{R})$正交

则$A\sim_o \operatorname{diag}(N_2(\cos\theta_1,\sin\theta_1),\dots,N_2(\cos\theta_s,\sin\theta_s),E_k,-E_l)$

其中$\theta_i\neq k\pi,k+l=n-2s$

证:由定理 2.2,$A\sim_o B$,即$\exists P\in O_n(\mathbb{R})$使得$B=P^tAP$

由命题 1.4 $\Rightarrow B$是正交的$\Rightarrow N_2(\alpha_i,\beta_i)$和$(\lambda_j)$都正交

于是$N_2(\alpha_i,\beta_i)=N_2(\cos\theta_i,\sin\theta_i),\lambda_j=\pm1$

调整下标后$B=\operatorname{diag}(N_2(\cos\theta_1,\sin\theta_1),\dots,N_2(\cos\theta_s,\sin\theta_s),E_k,-E_l)$ ■

【推论 3.2】复正交矩阵的特征根模长为 1

正交矩阵在$\mathbb{C}$的特征根的模长都是 1

证:由定理 3.3 只要证$N_2(\cos\theta,\sin\theta),\theta\neq k\pi$特征根的模长为 1 即可

$\mathcal{X}_{N_2(\cos\theta,\sin\theta)}=\begin{vmatrix}t-\cos\theta & \sin\theta\\ -\sin\theta & t-\cos\theta\end{vmatrix}=(t-\cos\theta)^2+\sin^2\theta$

于是$N_2(\cos\theta,\sin\theta)$的特征根为$\cos\theta\pm\sin\theta\sqrt{-1}$

$\therefore$ 特征根的模长为$\cos^2\theta+\sin^2\theta=1$ ■

§4 特殊正规算子

§4.1 （斜）对称算子

【定义 4.1.1】（斜）对称算子

设$\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$,如果$\mathcal{A}^* = \mathcal{A}\big($或$\mathcal{A}^* = -\mathcal{A}\big)$

则称$\mathcal{A}$为对称算子$\big($斜对称算子$\big)$

【命题 4.1】（斜）对称算子的判定

设$\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$,则$\mathcal{A}$是对称的$\big($斜对称的$\big)$

$\Leftrightarrow \mathcal{A}$在$V$的任一单位正交基下的矩阵是对称$\big($斜对称$\big)$的

证:只考虑对称情形,斜对称类似

设$\overrightarrow{e_1}, \dots, \overrightarrow{e_n}$是$V$的一组单位正交基

$\mathcal{A}$在$\overrightarrow{e_1}, \dots, \overrightarrow{e_n}$下的矩阵为$A$

则$\mathcal{A}^*$在$\overrightarrow{e_1}, \dots, \overrightarrow{e_n}$下的矩阵为$A^t$ $\big[$定理 2.1$\big]$

$\mathcal{A}$对称 $\Leftrightarrow \mathcal{A}^* = \mathcal{A} \Leftrightarrow A^t = A \Leftrightarrow A$对称 ■

【命题 4.2】（斜）对称算子的特征根和规范型

设$\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$是对称$\big($斜对称$\big)$的

$(i)\mathcal{A}$的所有特征根都是实数$\big($纯虚数或 0$\big)$

(ii)在V某组单位正交基下,$\mathcal{A}$的矩阵为 $\operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$

$$\left(\operatorname{diag}\left(\begin{pmatrix} 0 & -\beta_1 \\ \beta_1 & 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 0 & -\beta_s \\ \beta_s & 0 \end{pmatrix}, 0, \dots, 0\right), \beta_1, \dots, \beta_s \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\right)$$

证:由命题 4.1 和定理 3.1$\big($定理 3.2$\big)$直接得出

【命题 4.3】对称算子特征子空间互相垂直

设$\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$对称, 设$\alpha, \beta$是$\mathcal{A}$的两个不同特征根, 则$V^{\alpha} \perp V^{\beta}$

证: 设$\vec{u} \in V^{\alpha}, \vec{v} \in V^{\beta}, \mathcal{A}(\vec{u}) \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot \mathcal{A}(\vec{v})$

$\because \mathcal{A}(\vec{u}) \cdot \vec{v} = \alpha\vec{u} \cdot \vec{v}, \qquad \vec{u} \cdot \mathcal{A}(\vec{v}) = \beta\vec{u} \cdot \vec{v}$

$\therefore (\alpha - \beta)\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$

$\alpha \neq \beta \Rightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \Rightarrow \vec{u} \perp \vec{v} \Rightarrow V^{\alpha} \perp V^{\beta}$ ■

【例 4.3.1】求正交规范型转换矩阵例

设$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, 求正交矩阵$T$使得$T^tAT$是对角阵

解: $\mathcal{X}_A = |tE - A| = (t-1)^3(t+3)$, 特征根$\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -3$

V^{λ_1}是$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$的解空间

$$V^{\lambda_1} = \left\langle \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{12}}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right\rangle$$

类似, $V^{\lambda_2} = \left\langle \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$

$$T = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{12}} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{12}} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{12}} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{3}{\sqrt{12}} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, T^tAT = \mathrm{diag}(1,1,1,-3)$$

§4.2 正交算子

【定义 4.2】正交算子

设$\mathcal{A}\in\mathcal{L}(V)$,如果$\forall\vec{x},\vec{y}\in V,\vec{x}\cdot\vec{y}=\mathcal{A}(\vec{x})\cdot\mathcal{A}(\vec{y})$

则称$\mathcal{A}$是正交算子(保内算子)

【命题 4.4】正交算子的矩阵和保长性

设$\mathcal{A}\in\mathcal{L}(V)$,则下列断言等价

$(i)\mathcal{A}$是正交算子

$(ii)\mathcal{A}$在V的任一组单位正交基下的矩阵都是正交矩阵

$(iii)\forall\vec{x}\in V,\left||\vec{x}|\right|=\left||\mathcal{A}(\vec{x})|\right|$ [保长的]

证: $(i)\Rightarrow(ii)$: 设$\overrightarrow{e_1},\dots,\overrightarrow{e_n}$是$V$的一组单位正交基

$$\left(\mathcal{A}(\overrightarrow{e_1}),\dots,\mathcal{A}(\overrightarrow{e_n})\right)=(\overrightarrow{e_1},\dots,\overrightarrow{e_n})A$$

$$\mathcal{A}(\overrightarrow{e_\imath})\cdot\mathcal{A}(\overrightarrow{e_\jmath})=\left[(\overrightarrow{e_1},\dots,\overrightarrow{e_n})\overrightarrow{A^{(\imath)}}\right]\cdot\left[(\overrightarrow{e_1},\dots,\overrightarrow{e_n})\overrightarrow{A^{(\jmath)}}\right]$$

$$=\left(\overrightarrow{A^{(\imath)}}\right)^t\overrightarrow{A^{(\jmath)}}=\overrightarrow{(A^t)_\imath}\overrightarrow{A^{(\jmath)}}=\delta_{ij},i,j\in\{1,..,n\}\Rightarrow A^tA=E$$

$(ii)\Rightarrow(iii)$设$\vec{x}=x_1\overrightarrow{e_1}+\cdots+x_n\overrightarrow{e_n}$

$$\left||\vec{x}|\right|^2=\vec{x}\cdot\vec{x}=x_1^2+\cdots+x_n^2$$

$$\left||\mathcal{A}(\vec{x})|\right|^2=\mathcal{A}(\vec{x})\cdot\mathcal{A}(\vec{x})=\left(A\begin{pmatrix}x_1\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}\right)^tA\begin{pmatrix}x_1\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}x_1&\cdots&x_n\end{pmatrix}\underbrace{A^tA}_{E}\begin{pmatrix}x_1\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}=x_1^2+\cdots+x_n^2=\left||\vec{x}|\right|$$

$(iii)\Rightarrow(i)$: 设$\vec{x},\vec{y}\in V,\because\left||\vec{x}+\vec{y}|\right|=\left||\mathcal{A}(\vec{x}+\vec{y})|\right|$

$$\therefore(\vec{x}+\vec{y})\cdot(\vec{x}+\vec{y})=\left(\mathcal{A}(\vec{x}+\vec{y})\right)\cdot\left(\mathcal{A}(\vec{x}+\vec{y})\right)$$

$\therefore \left\|\vec{x}\right\|^2 + 2\vec{x}\cdot\vec{y} + \left\|\vec{y}\right\|^2 = \left\|\mathcal{A}(\vec{x})\right\|^2 + 2\mathcal{A}(\vec{x})\cdot\mathcal{A}(\vec{y}) + \left\|\mathcal{A}(\vec{y})\right\|^2$

$\because \left\|\vec{x}\right\|^2 = \left\|\mathcal{A}(\vec{x})\right\|^2, \left\|\vec{y}\right\|^2 = \left\|\mathcal{A}(\vec{y})\right\|^2$

$\therefore \vec{x}\cdot\vec{y} = \mathcal{A}(\vec{x})\cdot\mathcal{A}(\vec{y})$ ■

【命题 4.5】正交算子的规范型

设$\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$正交, 则$\mathcal{A}$在$V$的某组单位正交基下的矩阵为

$\mathrm{diag}(N_2(\cos\theta_1, \sin\theta_1), .., N_2(\cos\theta_s, \sin\theta_s), E_k, -E_l)$

$\theta_i \neq q\pi, q \in \mathbb{Z}$　$\mathcal{A}$的特征根模长为 1

证: 由定理 3.3, 命题 4.4(ii)直接可得

【例 4.2.1】正交矩阵规范型的应用

设$A \in M_n(\mathbb{R})$正交, -1 不是A的特征根

证明 $\det(E + A) > 0$

证:$\exists$正交矩阵P使得$P^tAP = B$且$l = 0$

$P^t(E + A)P = P^tP + P^tAP = E + B$

$= \mathrm{diag}(N_2(1 + \cos\theta_1, \sin\theta_1), \dots, N_s(1 + \cos\theta_s, sin\theta_s), 2E_{n-2s})$

于是只需证$\begin{vmatrix} 1+\cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & 1+\cos\theta \end{vmatrix} > 0$, 其中$\theta \neq q\pi, q \in \mathbb{Z}$

计算即得行列式$(1 + \cos\theta)^2 + \sin^2\theta > 0$ ■

§5 正交矩阵与实二次型

【定理 5.1】实二次型的规范型

设$q: V \to \mathbb{R}$ 是二次型,q在V的某组单位正交基下的矩阵为A

则存在V的另一组单位正交基

使得V在新的基下的矩阵为 $\operatorname{diag}(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, 且$A \sim_o \operatorname{diag}(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$

证: 设$\overrightarrow{e_1}, \dots, \overrightarrow{e_n}$是$V$的单位正交基,$\vec{x} = x_1\overrightarrow{e_1} + \cdots + x_n\overrightarrow{e_n}$

$$q(\vec{x}) = (x_1 \quad \cdots \quad x_n) A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, A \in M_n(\mathbb{R})\text{对称}$$

由定理 3.3,$\exists P \in O_n(\mathbb{R})$, 使得$P^t A P = \operatorname{diag}(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$

令$(\overrightarrow{\varepsilon_1}, \dots, \overrightarrow{\varepsilon_n}) = (\overrightarrow{e_1}, \dots, \overrightarrow{e_n})P$, 由定理 1.3,$\overrightarrow{\varepsilon_1}, \dots, \overrightarrow{\varepsilon_n}$是单位正交基

设$\vec{x} = y_1\overrightarrow{\varepsilon_1} + \cdots + y_n\overrightarrow{\varepsilon_n}$

$$q(\vec{x}) = (x_1 \quad \cdots \quad x_n) A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = (y_1 \quad \cdots \quad y_n) P^t A P \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

$$= (y_1 \quad \cdots \quad y_n) \operatorname{diag}(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \alpha_1 y_1^2 + \cdots + \alpha_n y_n^2 \qquad \blacksquare$$

【例 5.1.1】求二次型规范型例

设$\mathbb{R}^2$为标准欧氏空间,$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, $q(\vec{x}) = x_1^2 + x_2^2 + x_1 x_2$

计算$\mathbb{R}^2$的一组单位正交基, 使得$q(\vec{x})$在该基下是规范型

解: 令$A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$, 则$q(\vec{x}) = (x_1 \quad x_2) A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$

$$\mathcal{X}_A(t) = \left(t - \frac{1}{2}\right)\left(t - \frac{3}{2}\right), \lambda_1 = \frac{1}{2}, \lambda_2 = \frac{3}{2}$$

$$V^{\lambda_1}=\left\langle\underbrace{\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}}_{\overrightarrow{v_1}}\right\rangle,V^{\lambda_2}=\left\langle\underbrace{\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}}_{\overrightarrow{v_2}}\right\rangle$$

$$P=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix},P^tAP=\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & \lambda_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & 0\\ 0 & \frac{3}{2}\end{pmatrix}$$

令$(\overrightarrow{\varepsilon_1},\overrightarrow{\varepsilon_2})=(\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2})P=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}P=(\overrightarrow{v_1},\overrightarrow{v_2})$,

$$\vec{x}=y_1\overrightarrow{v_1}+y_2\overrightarrow{v_2}=(\overrightarrow{v_1},\overrightarrow{v_2})\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix}=(\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2})P\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix}$$

$$q(\vec{x})=(y_1,y_2)\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & 0\\ 0 & \frac{3}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix}=\frac{1}{2}y_1^2+\frac{3}{2}y_2^2$$

【定义 5.1.1】完全正交等方组

设W是域F上的线性空间,$\sigma_1,\dots,\sigma_m\in\mathcal{L}(W)$如果

$(i)\forall i,j\in\{\sigma_1,\dots,\sigma_m\},\sigma_i\circ\sigma_j=\delta_{ij}\sigma_i$

$(ii)\sigma_1+\cdots+\sigma_m=\mathcal{E}$

则称$\sigma_1,\dots,\sigma_m$是完全正交等方组

【例 5.1.2】平行投影完全正交等方组

设$W_1,\dots,W_m\subset W$是子空间,$W=W_1\oplus\cdots\oplus W_m$

则$\forall\vec{x}\in W,\exists!\,\overrightarrow{x_1}\in W_1,\dots,\overrightarrow{x_m}\in W_m$使得$\vec{x}=\overrightarrow{x_1}+\cdots+\overrightarrow{x_m}$

令$\pi_i:W\to W_i,\vec{x}\mapsto\overrightarrow{x_i}$,则$\pi_1,\dots,\pi_m$是完全正交等方组

$W=\operatorname{im}\pi_1\oplus\cdots\oplus\operatorname{im}\pi_m$

【引理 5.1】一正定可同时对角化

设$A,B\in M_n(\mathbb{R})$对称,如果A正定,

则$\exists P\in GL_n(\mathbb{R})$使得$P^tAP=E$,且$P^tBP$为对角矩阵

证:由第一章定理 17.3 可知,$\exists Q\in GL_n(\mathbb{R})$,使得$A=Q^tQ$

令$P_1=Q^{-1}$,则$P_1^tAP_1=E\quad\left[\because (Q^t)^{-1}=\left({Q^{-1}}^t\right)\right]$

$\because B$对称 $\quad\therefore P_1^tBP$也对称

由定理 3.1, $\quad\exists P_2\in O_n(\mathbb{R})$使得$P_2^t(P_1^tBP)P_2$是对角的

令$P=P_1P_2,\quad P^tBP=(P_1P_2)^tB(P_1P_2)=P_2^t(P_1^tBP)P_2$ 是对角阵

$P^tAP=(P_1P_2)^tA(P_1P_2)=P_2^t\underbrace{(P_1^tAP_1)}_{E}P_2=P_2^tP_2=E\quad[\because P_2\text{正交}]$ ∎

【例 5.1.3】正定矩阵行列式和不等式

设$A,B\in M_n(\mathbb{R})$正定,证明$\det(A+B)\geq\det A+\det B$

证:由引理 5.1,$\exists P\in GL_n(\mathbb{R})$使得$P^tAP=E,P^tBP=\operatorname{diag}(\beta_1,\dots,\beta_n)$

$\because B$正定 $\quad\therefore \beta_1,\dots,\beta_n>0$

$P^t(A+B)P=P^tAP+P^tBP$

$=E+\operatorname{diag}(\beta_1,\dots,\beta_n)=\operatorname{diag}(1+\beta_1,\dots,1+\beta_n)$

$\therefore(\det P)^2\det(A+B)=\det(P^t(A+B)P)=\prod_{i=1}^{n}(1+\beta_i)$

$(\det P)^2(\det A+\det B)=\det(P^tAP)+\det(P^tBP)$

$=\det E+\det\operatorname{diag}(\beta_1,\dots,\beta_n)=1+\beta_1\cdots\beta_n$

$\because\prod_{i=1}^{n}(1+\beta_i)>1+\beta_1\cdots\beta_n\quad\therefore\det(A+B)\geq\det A+\det B$ ∎

【定理 5.2】引理 5.1 的二次型版

设W是n维实线性空间,p,q是W上的两个二次型,且p正定

则存在W的一组基$\overrightarrow{\varepsilon_1},\dots,\overrightarrow{\varepsilon_n}$使得$\forall\vec{x}=x_1\overrightarrow{\varepsilon_1}+\cdots+x_n\overrightarrow{\varepsilon_n}$

$p(\vec{x})=x_1^2+\cdots+x_n^2, q(\vec{x})=\alpha_1x_1^2+\cdots+\alpha_nx_n^2$,其中$\alpha_1,\dots,\alpha_n\in\mathbb{R}$

证: 设$\overrightarrow{e_1},\dots,\overrightarrow{e_n}$是$W$的一组基,$p,q$在$\overrightarrow{e_1},\dots,\overrightarrow{e_n}$下的矩阵为$A,B$

则A,B对称且A正定,由引理 5.1,存在$M\in GL_n(\mathbb{R})$

使得$M^tAM=E, M^tBM=\operatorname{diag}(\alpha_1,\dots,\alpha_n)$,其中$\alpha_1,\dots,\alpha_n\in\mathbb{R}$

令$(\overrightarrow{\varepsilon_1},\dots,\overrightarrow{\varepsilon_n})=(\overrightarrow{e_1},\dots,\overrightarrow{e_n})M$

则$\overrightarrow{\varepsilon_1},\dots,\overrightarrow{\varepsilon_n}$下$p,q$的矩阵分别为$E$和$\operatorname{diag}(\alpha_1,\dots,\alpha_n)$ ■

§6 正定算子

【定义 6.1.1】正定算子

设$\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$对称,如果$\forall \vec{x} \in V \setminus \{\vec{0}\}, \mathcal{A}(\vec{x}) \cdot \vec{x} > 0$

则称$\mathcal{A}$是V上的正定算子

【命题 6.1】线性算子正定的判定

设$\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$对称,则$\mathcal{A}$正定 $\Leftrightarrow$ $\mathcal{A}$在V任一组单位正交基下的矩阵正定

证:设$\overrightarrow{e_1}, \dots, \overrightarrow{e_n}$是$V$的一组单位正交基,$\mathcal{A}$在$\overrightarrow{e_1}, \dots, \overrightarrow{e_n}$下的矩阵为$A$

设$\forall \vec{x} = x_1\overrightarrow{e_1} + \cdots + x_n\overrightarrow{e_n} \neq \vec{0}$

$$\mathcal{A}(\vec{x}) \cdot \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 & \cdots & x_n \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \qquad [A\text{对称}]$$

$$\mathcal{A}(\vec{x}) \cdot \vec{x} > 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 & \cdots & x_n \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} > 0 \Leftrightarrow A\text{正定} \quad \blacksquare$$

【定理 6.1】谱分解定理

设W是域F上的n维线性空间,$\mathcal{A} \in \mathcal{L}(W)$可对角化

则$\exists!\, \alpha_1, \dots, \alpha_m \in F$两两不同和完全正交等方组$\sigma_1, \dots, \sigma_m$

使得$\mathcal{A} = \alpha_1\sigma_1 + \cdots + \alpha_m\sigma_m$,且$\sigma_1, \dots, \sigma_m \in F[\mathcal{A}]$

证:(存在性)$\because A$可对角化

$\therefore \mathcal{A}$的互不相同特征根$\lambda_1, \dots, \lambda_m \in F$

满足$W = W^{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus W^{\lambda_m}$,$W^{\lambda_i}$是$\lambda_i$对应的特征子空间

设σ_i为从W到$W^{\lambda_i} \subset W$上的投射,$i = 1, \dots, m$

则$\sigma_1, \dots, \sigma_m$是完全正交等方组

验证:$\mathcal{A}=\lambda_1\sigma_1+\cdots+\lambda_m\sigma_m$

设$\vec{x}\in W,\exists!\,\overrightarrow{x_1}\in W^{\lambda_1},\dots,\overrightarrow{x_m}\in W^{\lambda_m}$使得$\vec{x}=\overrightarrow{x_1}+\cdots+\overrightarrow{x_m}$

由$\sigma_1,\dots,\sigma_m$定义,$\sigma_i(\vec{x})=\overrightarrow{x_i}$

于是$\vec{x}=\sigma_1(\vec{x})+\cdots+\sigma_m(\vec{x})$

$\mathcal{A}(\vec{x})=\mathcal{A}\big(\sigma_1(\vec{x})\big)+\cdots+\mathcal{A}\big(\sigma_m(\vec{x})\big)=\lambda_1\sigma_1(\vec{x})+\cdots+\lambda_m\sigma_m(\vec{x})$

$=(\lambda_1\sigma_1+\cdots+\lambda_m\sigma_m)(\vec{x})$　验证完毕

唯一性:设$\alpha_1,\dots,\alpha_k\in F$两两不同,$\tau_1,\dots,\tau_k$是完全正交等方组

且$\mathcal{A}=\alpha_1\tau_1+\cdots+\alpha_k\tau_k$

$\forall\vec{w}\in\operatorname{im}\tau_1,\exists\vec{v}\in W$ 使得$\vec{w}=\tau_1(\overrightarrow{v_1})$

$\mathcal{A}(\vec{w})=(\alpha_1\tau_1+\cdots+\alpha_k\tau_k)\big(\tau_1(\vec{v})\big)$

$=\alpha_1\tau_1^2(\vec{v})+\alpha_2\tau_2\tau_1(\vec{v})+\cdots+\alpha_k\tau_k\tau_1(\vec{v})=\alpha_1\tau_1(\vec{v})=\alpha_1\vec{w}$

$\Rightarrow\vec{w}$是以α_1为特征根的特征向量

于是$\alpha_1,\dots,\alpha_k$是$\mathcal{A}$的不同的特征根,$\operatorname{im}\tau_1\subset W^{\alpha_1},\dots,\operatorname{im}\tau_k\subset W^{\alpha_k}$

适当调整下标后$\alpha_1=\lambda_1,\dots,\alpha_k=\lambda_k$

$W=\underbrace{W^{\lambda_1}}_{\supset\operatorname{im}\tau_1}\oplus\cdots\oplus\underbrace{W^{\lambda_k}}_{\supset\operatorname{im}\tau_k}\oplus\cdots\oplus W^{\lambda_m}$

且$W=\operatorname{im}\tau_1\oplus\cdots\oplus\operatorname{im}\tau_k$

$\therefore k=m,\tau_1=\sigma_1,\dots,\tau_k=\sigma_m$

要证:$\forall i\in\{\sigma_1,\dots,\sigma_m\},\exists f_i\in F[\mathcal{A}]$,使得$\sigma_i=f_i(\mathcal{A})$

由$Lagrange$插值或中国剩余定理

$\exists f_i\in F[t]$,满足$f_i(\lambda_1)=\cdots=f_i(\lambda_{i-1})=0$

$f_i(\lambda_{i+1})=\cdots=f_i(\lambda_m)=0,f_i(\lambda_i)=1$

或$f_i\equiv 0\ mod\ (t-\lambda_1),\cdots f_i\equiv 0\ mod\ (t-\lambda_{i-1})$,

$f_i\equiv 1\ mod\ (t-\lambda_i)$

$f_i \equiv 0 \; mod \; (t-\lambda_{i+1}), \cdots, f_i \equiv 0 \; mod \; (t-\lambda_m)$

断言$\sigma_i = f_i(\mathcal{A}), i = 1, \ldots, m$

断言的证明　只需验证$\sigma_1 = f_1(\mathcal{A})$

$f_1(t) = g_j(t)\big(t-\lambda_j\big), j = 2, \ldots, m, \qquad g_j \in F[t]$

$f_1(t) = g_1(t)(t-\lambda_1) + 1, \qquad g_1 \in F[t]$

设$\vec{x} \in W$, 则$\vec{x} = \overrightarrow{x_1} + \cdots + \overrightarrow{x_m}$, 其中$\overrightarrow{x_i} \in W^{\lambda_i} = \operatorname{im} \sigma_i$, $i = 1, \ldots, m$

$\sigma_1(\vec{x}) = \overrightarrow{x_1}$

$f_1(\mathcal{A})(\vec{x}) = f_1(\mathcal{A})(\overrightarrow{x_1}) + \cdots + f_1(\mathcal{A})(\overrightarrow{x_2}) + \cdots + f_1(\mathcal{A})(\overrightarrow{x_m})$

$= (g_1(\mathcal{A})(\mathcal{A}-\lambda_1\mathcal{E}) + \mathcal{E})(\overrightarrow{x_1}) + \big(g_2(\mathcal{A})(\mathcal{A}-\lambda_2\mathcal{E})\big)(\overrightarrow{x_2})$

$+ \cdots + \big(g_m(\mathcal{A})(\mathcal{A}-\lambda_m\mathcal{E})\big)(\overrightarrow{x_m})$

$\because \overrightarrow{x_i} \in W^{\lambda_i} \quad \therefore \mathcal{A}(\overrightarrow{x_i}) = \lambda_i \overrightarrow{x_i} \Rightarrow (\mathcal{A}-\lambda_i\mathcal{E})(\overrightarrow{x_i}) = \vec{0}$

于是$f_1(\mathcal{A})(\vec{x}) = \mathcal{E}(\overrightarrow{x_1}) = \overrightarrow{x_1} = \sigma_1(\vec{x}) \qquad \blacksquare$

【定理 6.2】实正定矩阵唯一正定平方根存在性

设$A \in M_n(\mathbb{R})$正定, 则$\exists!$ 正定矩阵B使得$A = B^2$, 且$B \in \mathbb{R}[A]$

证: 由定理 3.1, 推论 3.1

$\exists P \in O_n(\mathbb{R})$使得$A = P^t \operatorname{diag}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \, P$

其中$\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}^+$

令$B = P^t \operatorname{diag}\big(\sqrt{\alpha_1}, \ldots, \sqrt{\alpha_n}\big) \, P$, 则$B$正定

$B^2 = P^t \operatorname{diag}\big(\sqrt{\alpha_1}, \ldots, \sqrt{\alpha_n}\big) \, PP^t \operatorname{diag}\big(\sqrt{\alpha_1}, \ldots, \sqrt{\alpha_n}\big) \, P$

$= P^t \operatorname{diag}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \, P = A$, 存在性成立

设$C \in M_n(\mathbb{R})$正定使得$A = C^2$

$\because C$可对角化 $\big[$定理 3.1$\big]$ $\therefore$ 由谱分解定理, 把C看作线性算子$\mathcal{C}$

$\mathcal{C} = \beta_1\tau_1 + \cdots + \beta_m\tau_m$

其中$\beta_1,\dots,\beta_m$是两两不同的实数,$\tau_1,\dots,\tau_m$是完全正交等方组

同样B对应的线性算子 $\mathcal{B}$ 也有谱分解

$\mathcal{B}=\sqrt{\alpha_1}\sigma_1+\cdots+\sqrt{\alpha_k}\sigma_k,\sigma_1,\dots,\sigma_k$是完全正交等方组

$\mathcal{A}=\mathcal{C}^2=(\beta_1\tau_1+\cdots+\beta_m\tau_m)\circ(\beta_1\tau_1+\cdots+\beta_m\tau_m)$

$=\beta_1^2\tau_1^2+\cdots+\beta_m^2\tau_m^2=\beta_1^2\tau_1+\cdots+\beta_m^2\tau_m$

同样$\mathcal{A}=\mathcal{B}^2=\alpha_1\sigma_1+\cdots+\alpha_k\sigma_k$

由谱分解定理的唯一性,$k=m$

不妨设$\alpha_1=\beta_1^2,\dots,\alpha_k=\beta_k^2,\tau_k=\sigma_k$,则$B=C$

$\because \sigma_i\in\mathbb{R}[A],i=1,\dots,m$[谱分解定理]$\Rightarrow B\in\mathbb{R}[A]$

【定理 6.3】极化分解

设$A\in GL_n(\mathbb{R})$,则$\exists!$ 正定矩阵S和正交矩阵T,使得$A=ST$

[S代表长度,T代表方向]

证: 由第一章定理 17.3,AA^t正定

由定理 6.2,$\exists$正定矩阵S,使得$AA^t=S^2$

令$T=S^{-1}A$,则$A=ST$,下面验证T是正交的

$TT^t=(S^{-1}A)(S^{-1}A)^t=S^{-1}AA^t(S^{-1})^t=S^{-1}S^2S^{-1}=E$

唯一性: 设S'正定,T'正交,使得$ST=S'T'$

则$T^tS^t=T'^tS'^t\Rightarrow STT^tS^t=S'T'T'^tS'^t$

$\Rightarrow SS^t=S'S'^t\Rightarrow S^2=S'^2\Rightarrow S=S'$ [定理 6.2 中唯一性]

$\Rightarrow T=T'$ ∎

§7 最小二乘法

§7.1 向量到子空间的距离

【定义 7.1.1】向量到空间的距离

设$\vec{v} \in V, W \subset V$是子空间,$\vec{v}$到$W$的距离定义为 $\min\limits_{\vec{w} \in W} |\vec{v} - \vec{w}|$

【引理 7.1】正交投影唯一性

设$W \subset V$是子空间,$\vec{v} \in V$,则$\exists ! \, \vec{x} \in W$使得$\langle \vec{v} - \vec{x} \rangle \perp W$

证:$V = W \oplus W^{\perp} \Rightarrow \exists ! \, \vec{x} \in W, \vec{y} \in W^{\perp}$使得$\vec{v} = \vec{x} + \vec{y}$

$\Rightarrow \vec{y} = \vec{v} - \vec{x} \in W^{\perp} \Rightarrow \langle \vec{v} - \vec{x} \rangle \perp W$

唯一性: 设$\vec{z} \in W$且$\langle \vec{v} - \vec{z} \rangle \perp W$,则$\vec{v} - \vec{z} \in W^{\perp}$

$\vec{v} = \underbrace{\vec{z}}_{\in W} + \underbrace{(\vec{v} - \vec{z})}_{\in W^{\perp}} \Rightarrow \vec{z} = \vec{x}$

注: 称$\vec{x}$为$\vec{v}$在W中的正交投影

【例 7.1.1】正交投影的计算

设$\vec{v} \in V, W = \langle \overrightarrow{w_1}, \ldots, \overrightarrow{w_d} \rangle, \dim W = d$

设$\vec{x} = x_1 \overrightarrow{w_1} + \cdots + x_d \overrightarrow{w_d}$ 为$\vec{v}$ 在W中的正交投影

$\langle \vec{v} - \vec{x} \rangle \perp W \Leftrightarrow (\vec{v} - \vec{x}) \cdot \overrightarrow{w_i} = 0, i = 1, \ldots, d$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{w_i} \cdot \vec{x} = \overrightarrow{w_i} \cdot \vec{v}, i = 1, \ldots, d$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{w_i} \cdot \left(\sum_{j=1}^{d} x_j \overrightarrow{w_j} \right) = \overrightarrow{w_i} \cdot \vec{v} \Leftrightarrow \sum_{j=1}^{d} x_j \left(\overrightarrow{w_i} \cdot \overrightarrow{w_j} \right) = \overrightarrow{w_i} \cdot \vec{v}$$

$$\Leftrightarrow G(\overrightarrow{w_1},\dots,\overrightarrow{w_d})\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\vec{v}\cdot\overrightarrow{w_1}\\ \vdots\\ \vec{v}\cdot\overrightarrow{w_d}\end{pmatrix}$$

$G(\overrightarrow{w_1},\dots,\overrightarrow{w_d})$满秩,则$\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_d\end{pmatrix}=G(\overrightarrow{w_1},\dots,\overrightarrow{w_d})^{-1}\begin{pmatrix}\vec{v}\cdot\overrightarrow{w_1}\\ \vdots\\ \vec{v}\cdot\overrightarrow{w_d}\end{pmatrix}$

注:若$W=\langle\overrightarrow{w_1},\dots,\overrightarrow{w_n}\rangle,\overrightarrow{w_1},\dots,\overrightarrow{w_n}$线性相关

则此时$G(\overrightarrow{w_1},\dots,\overrightarrow{w_n})$不满秩,解不唯一

但只是因为从$\overrightarrow{w_1},\dots,\overrightarrow{w_n}$中选取的$W$的基底不同,

所以$\vec{x}$的坐标不唯一. 真实的投影向量$\vec{x}$仍然是唯一的

【例 7.1.2】正交投影和距离计算实例

设$\vec{v}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\overrightarrow{w_1}=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\overrightarrow{w_2}=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$

计算$\vec{v}$在$\langle\overrightarrow{w_1},\overrightarrow{w_2}\rangle$中的正交投影和距离

解:$G(\overrightarrow{w_1},\overrightarrow{w_2})=\begin{pmatrix}\overrightarrow{w_1}\cdot\overrightarrow{w_1} & \overrightarrow{w_1}\cdot\overrightarrow{w_2}\\ \overrightarrow{w_2}\cdot\overrightarrow{w_1} & \overrightarrow{w_2}\cdot\overrightarrow{w_2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&1\\1&2\end{pmatrix}$

$\vec{v}\cdot\overrightarrow{w_1}=2,\vec{v}\cdot\overrightarrow{w_2}=2$

$$\begin{pmatrix}2&1\\1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}\quad\begin{cases}x_1=\dfrac{2}{3}\\ x_2=\dfrac{2}{3}\end{cases}$$

正交投影$\vec{x}=x_1\overrightarrow{w_1}+x_2\overrightarrow{w_2}=\dfrac{2}{3}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}+\dfrac{2}{3}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2/3\\4/3\\2/3\end{pmatrix}$

$\vec{v}$到$\langle\overrightarrow{w_1},\overrightarrow{w_2}\rangle$的距离为$|\vec{v}-\vec{x}|=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

§7.2 最小二乘法

【问题】求最小二乘解

设$A=(a_{ij})_{m\times n},\vec{b}=\begin{pmatrix}b_1\\ \vdots\\ b_m\end{pmatrix},a_{ij},b_j\in\mathbb{R},\vec{x}=\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}$

求解线性方程 $A\vec{x}=\vec{b}$

方程有解 $\Leftrightarrow \exists\alpha_1,\dots,\alpha_n\in\mathbb{R}$ 使得$\alpha_1\overrightarrow{A^{(1)}}+\cdots+\alpha_n\overrightarrow{A^{(n)}}=\vec{b}$

$\Leftrightarrow \vec{b}\in\left\langle\overrightarrow{A^{(1)}},\dots,\overrightarrow{A^{(n)}}\right\rangle=V_c(A)$

$\Leftrightarrow \vec{b}$ 到$V_c(A)$的距离为零

方程的“最小二乘解”：

求$\beta_1,\dots,\beta_n\in\mathbb{R}$ 使得$\left|\beta_1\overrightarrow{A^{(1)}}+\cdots+\beta_n\overrightarrow{A^{(n)}}-\vec{b}\right|$ 最小

即$\beta_1\overrightarrow{A^{(1)}}+\cdots+\beta_n\overrightarrow{A^{(n)}}$是$\vec{b}$在$V_c(A)$上的正交投影

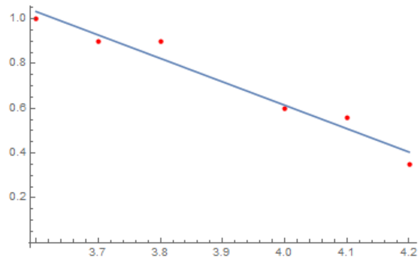
【例 7.2.1】最小二乘法应用

x——成分　y——成品率

$x\%$	3.6	3.7	3.8	4.0	4.1	4.2
y	1.0	0.9	0.9	0.6	0.56	0.35

$y=a(x\%)+b$

$[\text{二次拟合使用}:a(x\%)^2+bx\%+c]$



$$\begin{cases}3.6a+b=1.0\\ 3.7a+b=0.9\\ \vdots\\ 4.2a+b=0.35\end{cases}$$ 求最小二乘解，得$a=-1.05,b=4.81$

$y=-1.05(x\%)+4.81$

§8 Hermite 空间简介

【对比 8.1】正定和不可约多项式

设V是n维实空间,W是n维复空间

基域上的不同:

$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, x^2 > 0,\qquad \mathbb{R}[x] \setminus \mathbb{R}$ 中不可约多项式次数为 1 或 2

$\forall z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}, z\bar{z} > 0,\qquad \mathbb{C}[x] \setminus \mathbb{C}$ 中不可约多项式次数为 1

【定义 8.1.1】半双线性型

$f: W \times W \to \mathbb{C}$ 称为半双线性型,如果

$(i)\forall \vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in W, \alpha, \beta \in \mathbb{C}$

$f(\alpha\vec{x} + \beta\vec{y}, \vec{z}) = \alpha f(\vec{x}, \vec{z}) + \beta(\vec{y}, \vec{z})$

$f(\vec{x}, \alpha\vec{y} + \beta\vec{z}) = \bar{\alpha} f(\vec{x}, \vec{y}) + \bar{\beta} f(\vec{x}, \vec{z})$

【定义 8.1.2】Hermite 型

设f是W上的半双线性型,如果$\forall \vec{x}, \vec{y} \in W, f(\vec{x}, \vec{y}) = \overline{f(\vec{y}, \vec{x})}$

则称f是$Hermite$型

注:f是$Hermite$型 $\Rightarrow f(\vec{x}, \vec{x}) = \overline{f(\vec{x}, \vec{x})} \Rightarrow f(\vec{x}, \vec{x}) \in \mathbb{R}$

如果$\forall \vec{x} \in W \setminus \{\vec{0}\}, f(\vec{x}, \vec{x}) > 0$,则称$f$是正定的

【例 8.1.1】半双线性型的矩阵及正定性

设$\overrightarrow{e_1}, \ldots, \overrightarrow{e_n}$是$W$的一组基

$\vec{x} = x_1\overrightarrow{e_1} + \cdots + x_n\overrightarrow{e_n},\qquad \vec{y} = y_1\overrightarrow{e_1} + \cdots + y_n\overrightarrow{e_n}$

$f(\vec{x},\vec{y})=(x_1 \ \cdots \ x_n)A\begin{pmatrix}\overline{y_1}\\ \vdots \\ \overline{y_n}\end{pmatrix}$,其中$A=\left(f\left(\vec{e_i},\vec{e_j}\right)\right)_{m\times n}$

若f是$Hermite$的,则$\bar{A}^t=A$

此时称A是$Hermite$矩阵

f是正定的,则f对应的矩阵称为正定的

【对比 8.2】内积空间

V	(V,f)	f对称双线性型	$f(\vec{x},\vec{x})$正定	$\vec{x}\cdot\vec{y}\coloneqq f(\vec{x},\vec{y})$
W	(W,f)	$f\ Hermite$	$f(\vec{x},\vec{x})$正定	$(\vec{x}\vert\vec{y})\coloneqq f(\vec{x},\vec{y})$

W称为$Hermite$空间

【对比 8.3】范数和正交性

V	$\vert\vec{x}\vert=\sqrt{\vec{x}\cdot\vec{x}}$	$\vec{x}\perp\vec{y}\Leftrightarrow\vec{x}\cdot\vec{y}=0$	$G.S.$正交化
W	$\vert\vec{x}\vert=\sqrt{(\vec{x}\vert\vec{x})}$	$\vec{x}\perp\vec{y}\Leftrightarrow(\vec{x}\vert\vec{y})=0$	$G.S.$正交化

【对比 8.4】单位正交基和正交相似

V: $A\in GL_n(\mathbb{R}),(\vec{\varepsilon_1},\dots,\vec{\varepsilon_n})=(\vec{e_1},\dots,\vec{e_n})A,\vec{e_1},\dots,\vec{e_n}$是单位正交基

则$\vec{\varepsilon_1},\dots,\vec{\varepsilon_n}$是单位正交基$\Leftrightarrow A$是正交矩阵

W: $A\in GL_n(\mathbb{C}),(\vec{\varepsilon_1},\dots,\vec{\varepsilon_n})=(\vec{e_1},\dots,\vec{e_n})A,\vec{e_1},\dots,\vec{e_n}$是单位正交基

则$\vec{\varepsilon_1},\dots,\vec{\varepsilon_n}$是单位正交基$\Leftrightarrow\bar{A}^tA=E$ 称A为酉矩阵

正交相似: $A\sim_o B$, 酉相似: $A\sim_u B$

【对比 8.5】正规算子与正规矩阵

欧氏空间:

$a1)\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V), \mathcal{A}^* \in \mathcal{L}(V)$为$\mathcal{A}$的伴随算子

$a2)$如果$\forall \vec{x}, \vec{y} \in V, \vec{x} \cdot \mathcal{A}(\vec{y}) = \mathcal{A}^*(\vec{x}) \cdot \vec{y}$

$a3)$若$\mathcal{A}^* \circ \mathcal{A} = \mathcal{A} \circ \mathcal{A}^*$,则称$\mathcal{A}$正规

$a4)A \in M_n(\mathbb{R})$是正规 $\Leftrightarrow A^t A = A A^t$

$a5)$(斜)对称: $(-1)A^t = A$, 正交: $A^t A = E$

$Hermite$:

$b1)\mathcal{A} \in \mathcal{L}(W), \mathcal{A}^* \in \mathcal{L}(W)$为$\mathcal{A}$的伴随算子

$b2)$如果$\forall \vec{x}, \vec{y} \in V, \vec{x} \cdot \mathcal{A}(\vec{y}) = \mathcal{A}^*(\vec{x}) \cdot \vec{y}$

$b3)$若$\mathcal{A}^* \circ \mathcal{A} = \mathcal{A} \circ \mathcal{A}^*$,则称$\mathcal{A}$正规

$b4)A \in M_n(\mathbb{C})$正规 $\Leftrightarrow \bar{A}^t A = A \bar{A}^t$

$b5)$(斜)$Hermite$: $(-1)\bar{A}^t = A$, 酉矩阵: $\bar{A}^t A = E$

【对比 8.6】标准型

V:

$a1)U\subset V$子空间,则$V=U\oplus U^{\perp}$

$a2)$若$\mathcal{A}$正规,U是$\mathcal{A}-$不变的,则$U^{\perp}$也$\mathcal{A}-$不变

$a3)\mathcal{A}$有一维或二维不变子空间$\Rightarrow V=U_1\oplus\cdots\oplus U_l$

$a4)U_i$是一维或二维$\mathcal{A}-$子空间

$a5)A$正规: $A\sim_o \operatorname{diag}(N_2(\alpha_1,\beta_1),\dots,N_2(\alpha_s,\beta_s),\lambda_{2s+1},\dots,\lambda_n)$

$a6)A\in M_n(\mathbb{R})$对称, $A\sim_o \operatorname{diag}(\alpha_1,\dots,\alpha_n)$

$a7)A$斜对称: $A\sim_o \operatorname{diag}\left(\begin{pmatrix}0&-\beta_1\\\beta_1&0\end{pmatrix},\dots,\begin{pmatrix}0&-\beta_s\\\beta_s&0\end{pmatrix},0,\dots,0\right),\beta_i\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$

$a8)A$正交: $A\sim_o \operatorname{diag}(N_2(\cos\theta_1,\sin\theta_1),\dots N_2(\cos\theta_s,\sin\theta_s),\pm1,\dots,\pm1)$

W:

$b1)U\subset W$子空间,则$V=U\oplus U^{\perp}$

$b2)$若$\mathcal{A}$正规,U是$\mathcal{A}-$不变的,则$U^{\perp}$也$\mathcal{A}-$不变

$b3)\mathcal{A}$有一维不变子空间$\Rightarrow W=U_1\oplus\cdots\oplus U_n$

$b4)U_i$是一维$\mathcal{A}-$子空间 $[\mathcal{A}$正规$]$

$b5)\mathcal{A}$正规: $A\sim_u \operatorname{diag}(\lambda_1,\dots,\lambda_n)$

$b6)A\in M_n(\mathbb{C}), Hermite, A\sim_u \operatorname{diag}(\alpha_1,\dots,\alpha_n),\alpha_1,\dots,\alpha_n\in\mathbb{R}$

$b7)A$斜$Hermite$: $A\sim_u \operatorname{diag}(\alpha_1\sqrt{-1},\dots,\alpha_n\sqrt{-1}),\alpha_i\in\mathbb{R}$

$b8)A$酉矩阵: $A\sim_u \operatorname{diag}\left(e^{\theta_1\sqrt{-1}},\dots,e^{\theta_n\sqrt{-1}}\right)\quad e^{\theta\sqrt{-1}}=\cos\theta+\sqrt{-1}\sin\theta$

【对比 8.7】三个定理

同时化对角线,平方根定理,极化定理对$M_n(\mathbb{C})$中的方阵均成立

此时正交矩阵变为酉矩阵,对称矩阵变为$Hermite$矩阵

总结

· 消元与降维　$Gauss$消去，归纳法

· 利用等价关系分类，在等价类中找标准型

· $\sim_e, \sim_c, \sim_s \sim_o, \sim_u$

· $Divide - Conquer - Combine$

· $Divide$: 多项式因式分解，$Bezout$关系，直和分解

· $Conquer$: $Jordan$块，二维正规块

· $Combine$: lcm, 乘法，中国剩余定理，插值，$Jordan$标准型

习题课选集

【2-1】循环行列式的计算

证明 $\begin{vmatrix} x_0 & x_1 & x_2 & \cdots & x_{n-1} \\ x_{n-1} & x_0 & x_1 & \cdots & x_{n-2} \\ x_{n-2} & x_{n-1} & x_0 & \cdots & x_{n-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_0 \end{vmatrix} = \prod_{k=0}^{n-1}\sum_{i=0}^{n-1} x_i \xi^{ik}$

其中ξ是 1 的一个n次本原根

证: 令$f(t) = x_0 + x_1 t + \cdots + x_{n-1}t^{n-1}, \varepsilon_k = \xi^k$

则等号右端为$\prod_{k=0}^{n-1} f(\varepsilon_k)$

令$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \varepsilon_0 & \varepsilon_1 & \cdots & \varepsilon_{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \varepsilon_0^{n-1} & \varepsilon_1^{n-1} & \cdots & \varepsilon_{n-1}^{n-1} \end{pmatrix}$, A为所求行列式对应的矩阵

则易验证$AP = \begin{pmatrix} f(\varepsilon_0) & f(\varepsilon_1) & \cdots & f(\varepsilon_{n-1}) \\ \varepsilon_0 f(\varepsilon_0) & \varepsilon_1 f(\varepsilon_1) & \cdots & \varepsilon_{n-1} f(\varepsilon_{n-1}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \varepsilon_0^{n-1} f(\varepsilon_0) & \varepsilon_1^{n-1} f(\varepsilon_1) & \cdots & \varepsilon_{n-1}^{n-1} f(\varepsilon_{n-1}) \end{pmatrix}$

于是 $\det A \det P = \det AP = \left(\prod_{k=0}^{n-1} f(\varepsilon_k)\right)\det P$

由于ξ为本原单位根, 则ε_k两两不同,

因此作为范德蒙行列式 $\det P \neq 0$

则 $\det A = \prod_{k=0}^{n-1} f(\varepsilon_k)$ ■

【2-2】范德蒙行列式与对称多项式

考虑范德蒙行列式$\triangle(x,x_1,\dots,x_n)=\begin{vmatrix}1 & 1 & \cdots & 1\\ x & x_1 & \cdots & x_n\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ x^n & x_1^n & \cdots & x_n^n\end{vmatrix}$

将x视为变量,$x_1,\dots,x_n$为两两不同的常亮,

得到函数$g(x)=\triangle(x,x_1,\dots,x_n)$

将第一列展开,可知$g(x)$是一个n次多项式

且x^n的系数为$a_n=\triangle(x_1,\dots,x_n)$

所以$\dfrac{g(x)}{a_n}$在x^d处的系数就是$g(x)$的根的

第$n-d$个初等对称多项式(差一个符号)

即设$\dfrac{g(x)}{a_n}=x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0=(x-c_1)\cdots(x-c_n)$

则$a_d=(-1)^d s_{n-d}(c_1,\dots,c_n)$

然而,需要注意到$g(x_i)=0,x_i=1,\dots,n$,可令$c_i=x_i$

另一方面,对第一列展开,直接得到x^d的系数为

$$(-1)^d\begin{vmatrix}1 & 1 & \cdots & 1\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ x_1^{d-1} & x_2^{d-1} & \cdots & x_n^{d-1}\\ x_1^{d+1} & x_2^{d+1} & \cdots & x_n^{d+1}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ x_1^n & x_2^n & \cdots & x_n^n\end{vmatrix}$$

对比可知$\begin{vmatrix}1 & 1 & \cdots & 1\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ x_1^{d-1} & x_2^{d-1} & \cdots & x_n^{d-1}\\ x_1^{d+1} & x_2^{d+1} & \cdots & x_n^{d+1}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ x_1^n & x_2^n & \cdots & x_n^n\end{vmatrix}=a_n s_{n-d}(x_1,\dots,x_n)$

$=\triangle(x_1,\dots,x_n)s_{n-d}(x_1,\dots,x_n)$

【3-1】限制条件的多项式空间

由所有的一个变元x的次数$\leq n$的满足条件$f(1)=0$的

多项式组成的空间的维数是多少？并找出这个空间的一个基底

解: 令$V=\{f\in F[x] \mid \deg f\leq n, f(1)=0\}$

对$f\in V$, 设$f(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n$

则$f(1)=a_0+a_1+\cdots+a_n=0$

据此可猜测$S=\left\{x^{i+1}-x^i \middle| i=0,\dots,n-1\right\}$为$V$的基

一方面, 设$\displaystyle\sum_{i=0}^{n-1}b_i\left(x^{i+1}-x^i\right)=0$ 对$\forall x$成立

则$\displaystyle b_{n-1}x^n+\sum_{i=1}^{n-1}(b_{i-1}-b_i)x^i-b_0=0$

则由零多项式的定义, $b_{n-1}=b_{n-2}-b_{n-1}=\cdots=b_0-b_1=-b_0=0$

$\Rightarrow b_{n-1}=b_{n-2}=\cdots=b_1=b_0=0$

即S线性无关

另一方面, 对$f(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n, a_0+\cdots+a_n=0$

则对$b_{n-1},\dots,b_1,b_0\in F$

$$\sum_{i=0}^{n-1}b_i\left(x^{i+1}-x^i\right)=b_{n-1}x^n+\sum_{i=1}^{n-1}(b_{i-1}-b_i)x^i-b_0$$

与$f(x)$比较系数可解出恰当的$b_0,\dots,b_{n-1}$, 于是$V=\langle S\rangle$

从而S为V的基底, 且$\dim V=n$

注: 也可以用基底$\{(x-1),\dots,(x-1)^n\}$

【3-2】有理多项式复根生成的空间维数

设θ是 $\mathbb{Q}$ 上不可约多项式$f\in\mathbb{Q}[t]$的一个复根

求空间 $\mathbb{Q}[\theta]=\langle 1,\theta,\dots,\theta^k,\dots\rangle_{\mathbb{Q}}$在 $\mathbb{Q}$ 上的维数

解: 设 $\deg f=d$, 则 $\dim_{\mathbb{Q}}\mathbb{Q}[\theta]=d$

且有一组基底$S=\{1,\theta,\dots,\theta^{d-1}\}$

设$a_0+a_1\theta+\cdots+a_{d-1}\theta^{d-1}=0$

如果存在不全为零的a_i使上式成立,

则令$g(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_{d-1}x^{d-1}$

则$g(\theta)=0,\theta$为g的根, 即为g与f在 $\mathbb{C}$ 中的公共根

于是 $\deg\gcd(g,f)\geq 1$

又 $\deg\gcd(g,f)\leq\deg g\leq d-1$

则f有非平凡因子, 这与f不可约矛盾

于是$a_0=\cdots=a_{d-1}=0$, 即S线性无关

另一方面, $\forall x\in\mathbb{Q}[\theta],\exists h\in\mathbb{Q}[x]$, 使得$x=h(\theta)$

h 对f作带余除法, 即 $h(x)=q(x)f(x)+r(x),\deg r\leq d-1$

则 $h(\theta)=q(\theta)f(\theta)+r(\theta)=r(\theta)$, 即$x=r(\theta)\in\langle S\rangle$

综上, S为 $\mathbb{Q}[\theta]$的基底, 且 $\dim_{\mathbb{Q}}Q[\theta]=d$

【3-3】由一些点值推断函数线性无关

在 $\mathrm{Func}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ 中, 向量$f_1,\dots,f_n$线性无关 $\Leftrightarrow\exists a_1,\dots,a_n\in\mathbb{R}$

使得 $\det\left(f_i(a_j)\right)\neq 0$

证: $\Leftarrow$: $\exists a_1,\dots,a_n\in\mathbb{R}$, 使得 $\det\left(f_i(a_j)\right)\neq 0$

假设$f_1,\dots,f_n$线性相关,则存在$\lambda_1,\dots,\lambda_n$不全为零

使得$\lambda_1 f_1+\cdots+\lambda_n f_n=0$

于是对这个等式在$a_1,\dots,a_n$赋值

则有$\begin{pmatrix} f_1(a_1) & f_2(a_1) & \cdots & f_n(a_1) \\ f_1(a_2) & f_2(a_2) & \cdots & f_n(a_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_1(a_n) & f_2(a_n) & \cdots & f_n(a_n) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$

即此线性方程组有非零解$(\lambda_1,\dots,\lambda_n)^t$

这与$\det\left(f_i(a_j)\right)\neq 0$ 矛盾 故$f_1,\dots,f_n$线性无关

$\Rightarrow$ 若$f_1,\dots,f_n$线性无关,欲证$\exists a_1,\dots,a_n$使得$\det\left(f_i(a_j)\right)\neq 0$

对n归纳,若$n=1,f_1(x)$线性无关$\Rightarrow f_1(x)$不是零函数

则$\exists a_1\in\mathbb{R}$,使得$f_1(a_1)\neq 0$

对$f_1,\dots,f_k$线性无关,且找到了$a_1,\dots,a_k$使得$\det\left(f_i(a_j)\right)\neq 0$

对线性无关的$f_1,\dots,f_{k+1}$,对其中的$f_1,\dots,f_k$用归纳假设

取$a_1,\dots,a_k$使得$\det\left(f_i(a_j)\right)\neq 0,1\le i,j\le k$

考虑$F(x)=\begin{vmatrix} f_1(a_1) & f_2(a_1) & \cdots & f_k(a_1) & f_{k+1}(a_1) \\ f_1(a_1) & f_2(a_2) & \cdots & f_k(a_2) & f_{k+1}(a_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ f_1(a_k) & f_2(a_k) & \cdots & f_k(a_k) & f_{k+1}(a_k) \\ f_1(x) & f_2(x) & \cdots & f_k(x) & f_{k+1}(x) \end{vmatrix}$

对最后一行展开,由$F(x)=c_1f_1(x)+\cdots+c_{k+1}f_{k+1}(x)$

则$c_{k+1}=\det\left(f_i(a_j)\right)\neq 0$

于是由$f_1,\dots f_{k+1}$线性无关可知$F(x)$不恒为零

则$\exists a_{k+1}\in\mathbb{R}$ 使得$F(a_{k+1})\neq 0$

【4-1】求子空间和与交的基

设$\overrightarrow{u_1}=(1,2,1)^t,\overrightarrow{u_2}=(1,1,-1)^t,\overrightarrow{u_3}=(1,3,3)^t$

$\overrightarrow{v_1}=(1,2,2)^t,\overrightarrow{v_2}=(2,3,-1)^t,\overrightarrow{v_3}=(1,1,-3)^t$

$U=\langle\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2},\overrightarrow{u_3}\rangle,V=\langle\overrightarrow{v_1},\overrightarrow{v_2},\overrightarrow{v_3}\rangle$,求$U+V$和$U\cap V$的基

解:进行列变换

$$(\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2},\overrightarrow{u_3})=\begin{pmatrix}1&1&1\\2&1&3\\1&-1&3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0\\2&-1&1\\1&-2&2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0\\2&-1&0\\1&-2&0\end{pmatrix}$$

$\therefore \dim U=2$, 可取$U=\langle\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2}\rangle$

$$(\overrightarrow{v_1},\overrightarrow{v_2},\overrightarrow{v_3})=\begin{pmatrix}1&2&1\\2&3&1\\2&-1&-3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0\\2&-1&-1\\2&-5&-5\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0\\2&-1&0\\2&-5&0\end{pmatrix}$$

$\therefore \dim V=2$, 可取$V=\langle\overrightarrow{v_1},\overrightarrow{v_2}\rangle$

考虑$(\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2},\overrightarrow{v_3})=\begin{pmatrix}1&1&1\\2&1&1\\1&-1&-3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0\\2&-1&-1\\1&-2&-4\end{pmatrix}$

$\to\begin{pmatrix}1&0&0\\2&-1&0\\1&-2&-2\end{pmatrix}\quad\therefore \dim(U+V)\geq 3$

$\because U+V\subset\mathbb{R}^3\quad\therefore \dim(U+V)\leq 3$

$\therefore \dim(U+V)=3,\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2},\overrightarrow{v_3}$是$U+V$的一组基

由维数公式可得$\dim(U\cap V)=\dim U+\dim V-\dim(U+V)=1$

令$\vec{x}\in U\cap V$,则可设$\vec{x}=\alpha_1\overrightarrow{u_1}+\alpha_2\overrightarrow{u_2}=\beta_1\overrightarrow{v_1}+\beta_2\overrightarrow{v_2}$

则有$\begin{cases}\alpha_1+\alpha_2-\beta_1-2\beta_2=0\\2\alpha_1+\alpha_2-2\beta_1-3\beta_2=0\\\alpha_1-\alpha_2-2\beta_1+\beta_2=0\end{cases}$

即$\begin{pmatrix}1&1&-1&-2\\2&1&-2&-3\\1&-1&-2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha_1\\\alpha_2\\\beta_1\\\beta_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$

进行行变换

$$\begin{pmatrix}1&1&-1&-2\\2&1&-2&-3\\1&-1&-2&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&-1&-2\\0&-1&0&1\\0&-2&-1&3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&-1&-2\\0&-1&0&1\\0&0&-1&1\end{pmatrix}$$

则可解得$(\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2)=k(2,1,1,1)$

则有 $2\overrightarrow{u_1}+\overrightarrow{u_2}=\overrightarrow{v_1}+\overrightarrow{v_2}\in U\cap V$,显然 $2\overrightarrow{u_1}+\overrightarrow{u_2}\neq 0$

则 $2\overrightarrow{u_1}+\overrightarrow{u_2}$为$U\cap V$的基

【4-2】商空间与线性映射

(1)对线性空间V,$W\subseteq V$是子空间

$V/_W=\{\vec{v}+W|\vec{v}\in V\}$

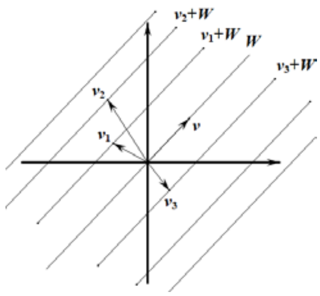
$\vec{v}+W$是一个记号,表示集合$\vec{v}+W=\{\vec{v}+\vec{w}|\vec{w}\in W\}$,称为一个陪集

故商空间是一个集合的集合,$V/_W\subseteq V$的写法是错误的

$V/_W$可由等价关系给出:在V上定义$\overrightarrow{v_1}\sim\overrightarrow{v_2}\Leftrightarrow\overrightarrow{v_1}-\overrightarrow{v_2}\in W$

则可验证$\sim$为等价关系,从而$V/_W=V/_\sim$,而每个陪集是一个等价类

如$\vec{v}\in\mathbb{R}^2,\vec{v}\neq\vec{0},W=\langle\vec{v}\rangle$是一条线



而商空间是W的所有平行线的集合

值得注意的是,可以对陪集定义运算

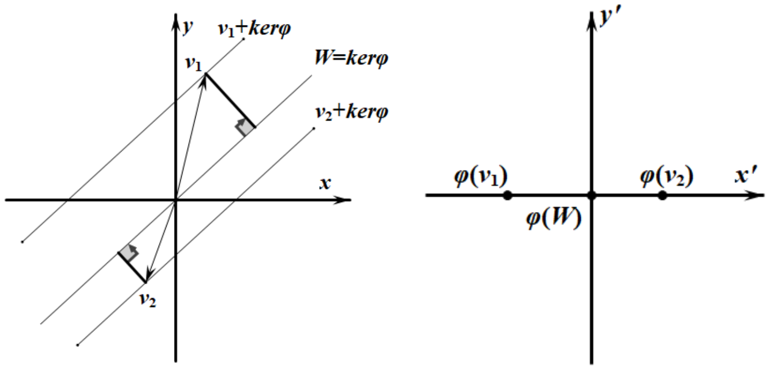
$(\overrightarrow{v_1}+W)+(\overrightarrow{v_2}+W)\coloneqq(\overrightarrow{v_1}+\overrightarrow{v_2})+W$

$k(\overrightarrow{v_1}+W)=k\overrightarrow{v_1}+W$

几何上来看,就是不同的线也可以做线性运算

(2)如何从几何上理解$\varphi \in \operatorname{Hom}(V,W)$, $V/_{\ker\varphi} \simeq \operatorname{im}\varphi$

例: $\varphi: \mathbb{R}^2 \coloneqq V_1 \to \mathbb{R}^2 \coloneqq V_2, (x,y) \mapsto \left(\frac{x-y}{\sqrt{2}}, 0\right) = (x', y')$



观察可知φ将R^2中的任何点到$\ker\varphi$的有向距离定义为x'

令y'总为零的线性映射, 于是$\operatorname{im}\varphi = x'$轴

对陪集$\vec{v} + \ker\varphi$即一条$\ker\varphi$的平行线

它上面任何一点到$\ker\varphi$的距离都为一个固定值

这距离不变性从代数上解释, 即有分解

$$\begin{tikzcd} V_1 \arrow[r, "\varphi"] \arrow[dr, "\pi"'] & \operatorname{im}\varphi \subseteq V_2 \\ & V_1/_{\ker\varphi} \arrow[u, "\bar{\varphi}"'] \end{tikzcd}$$

且对每个实数d, 存在唯一的一条$\ker\varphi$的平行线$\vec{v} + \ker\vec{\varphi}$

使得$\varphi(\vec{v}) = (d, 0)$

存在性即$V_1/_{\ker\varphi} \to \operatorname{im}\varphi$是满射

唯一性即$V_1/_{\ker\varphi} \to \operatorname{im}\varphi$是单射

所以在此例中$V_1/_{\ker\varphi} \simeq \operatorname{im}\varphi$

即是$\ker\varphi$的平行线与实数有一个一一对应的关系

【5-1】正合序列

假设存在一列有限维线性空间与映射

$0 \xrightarrow{\varphi_0} V_1 \xrightarrow{\varphi_1} V_2 \xrightarrow{\varphi_2} \cdots \xrightarrow{\varphi_{n-1}} V_n \xrightarrow{\varphi_n} 0$

其中$\varphi_0 = \varphi_n = 0$,同时满足$\ker\varphi_i = \operatorname{im}\varphi_{i-1}, i = 1, \dots, n$

求证$\sum_{i=1}^{n}(-1)^i \dim V_i = 0$

证:对每个V_i用维数公式,得

$\dim V_i = \dim\ker\varphi_i + \dim\operatorname{im}\varphi_i = \dim\ker\varphi_i + \dim\ker\varphi_{i+1}$

则$-\dim V_1 = -\dim\ker\varphi_i - \dim\ker\varphi_2$

$\dim V_2 = \dim\ker\varphi_2 + \dim\ker\varphi_3$

…

$(-1)^{n-1}\dim V_{n-1} = (-1)^{n-1}\dim\ker\varphi_{n-1} + (-1)^{n-1}\dim\ker\varphi_n$

$(-1)^n\dim V_n = (-1)^n\dim\ker\varphi_n$

相加消去即得$\sum_{i=1}^{n}(-1)^i \dim V_i = -\dim\ker\varphi_1$

然而$\because \varphi_0$是零映射,$\therefore \ker\varphi_1 = \operatorname{im}\varphi_0 = \{\vec{0}\}$

则$\sum_{i=1}^{n}(-1)^i \dim V_i = 0$

注:这样的线性空间的线性映射的序列被称为正合序列

在拓扑学,代数几何,理论物理中常见

如著名的欧拉公式$V - E + F = 2$ 可利用图论结合此法证明

【6-1】求对偶基

$\overrightarrow{v_1}=(1,0,-1)^t,\overrightarrow{v_2}=(1,1,1)^t,\overrightarrow{v_3}=(0,1,1)^t$构成$\mathbb{R}^3$的一组基

求其对偶基

解: 设$A=(\overrightarrow{v_1},\overrightarrow{v_2},\overrightarrow{v_3})=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\-1&1&1\end{pmatrix}$

由讲义第一章命题 9.1,$\overrightarrow{v_1},\overrightarrow{v_2},\overrightarrow{v_3}$的对偶基满足

$(v_1^*,v_2^*,v_3^*)=(X_1,X_2,X_3)(A^t)^{-1}$

于是仅需计算$(A^t)^{-1}=\begin{pmatrix}0&1&-1\\1&-1&2\\-1&1&-1\end{pmatrix}$,过程略

从而$v_1^*=X_2-X_3,v_2^*=X_1-X_2+X_3,v_3^*=-X_1+2X_2-X_3$

【6-2】线性函数可表为迹函数

证明V上的每一个线性函数f必形如$f(X)=\operatorname{tr}AX$

其中矩阵$A=A_f$是唯一确定的

证: 设e_{ij}为第i行第j列为 1,其余位置为 0 的矩阵

则知$\operatorname{tr}\left(e_{ji}X\right)=x_{ij}$,那么$X=\sum\limits_{1\le i,j\le n}x_{ij}e_{ij}$

特别地,$\operatorname{tr}\left(e_{ji}e_{st}\right)=\delta_{is}\delta_{jt}$当且仅当$i=s$且$j=t$时为 1

于是$f_{ij}(X)=\operatorname{tr}\left(e_{ji}X\right)$为$e_{ij}$的对偶基

于是$\forall f\in M_n(F)^*,f=\sum a_{ij}f_{ij}$ a_{ij}只与f有关

令$A=\sum\limits_{1\le i,j\le n}a_{ij}e_{ij}$,则$A$由$f$唯一确定

且$f(x)=\sum\limits_{1\le i,j\le n}a_{ij}\operatorname{tr}\left(e_{ji}X\right)=\operatorname{tr}\left(\left(\sum\limits_{1\le i,j\le n}a_{ij}e_{ij}\right)X\right)=\operatorname{tr}AX$ ∎

【6-3】核相等则对偶向量线性相关

设V是线性空间,$f,g\in V^*$,且$\ker f=\ker g$

证明:必有纯量λ使得$g=\lambda f$

法 1:若$\ker f=\ker g=V$,则$f=g=0$

不妨取$\lambda=1$,则$f=\lambda g$

若$\ker f=\ker g=W\subsetneq V$,则$V/_W\simeq \operatorname{im} f\simeq \operatorname{im} g\subseteq F$

且$\dim V/_W\neq 0$,则$\dim V/_W=\dim F=1$

由映射分解,存在$\pi: V\to V/_W$, $\bar{f},\bar{g}: V/_W\to F$

使得$f=\bar{f}\circ\pi, g=\bar{g}\circ\pi$

且f,g非零$\Rightarrow\bar{f},\bar{g}$非零

$\because \dim V/_W=1\ \therefore \dim \operatorname{Hom}(V/_W,F)=1$

于是f,g一定线性相关 ■

法 2:令$U_1=\langle f\rangle, U_2=\langle g\rangle$是$V^*$的子空间

则由定义,$U_1^\circ=\{\vec{x}\in V|f(\vec{x})=0\}=\ker f$

同理,$U_2^\circ=\ker g$ 于是$U_1^\circ=U_2^\circ$

然而由讲义定理 9.5(ii),$\langle f\rangle=U_1=(U_1^\circ)^\circ,\langle g\rangle=U_2=(U_2^\circ)^\circ$

于是$\langle f\rangle=\langle g\rangle$,即$\exists\lambda, f=\lambda g$ ■

注:定理 9.5 要求V有限维的情况;而法 1 对无限维也适用

【6-4】存在基使得对偶函数能取一坐标

设V是n维线性空间,$f \in V^* \setminus \{0\}$

则存在V的一组基$\{\overrightarrow{e_i}\}$使得$f(x_1\overrightarrow{e_1} + \cdots + x_n\overrightarrow{e_n}) = x_1$

证: 法 1: 用自然同构$V \simeq V^{**}$

由于f不是零函数, 所以由基扩充

可将f扩充为V^*的一组基$f_1, \dots, f_n$, 其中$f = f_1$

现在取$f_1, \dots, f_n$的一组对偶基$f_1^*, \dots f_n^* \in V^{**}, f_i^*(f_j) = \delta_{ij}$

然而, 由自然同构$V \simeq V^{**}$

则存在$\overrightarrow{e_1}, \dots, \overrightarrow{e_n}$为$V$的一组基, 使得$f_i^* = \mathcal{E}_{e_i}$

于是$f_i^*(f_1) = f_1(e_i) = \delta_{1i}$

那么$f(x_1\overrightarrow{e_1} + \cdots + x_n\overrightarrow{e_n}) = \sum_{i=1}^{n} x_i\delta_{1i} = x_1$ ■

法 2: $f \in V^* \setminus \{0\}$, 则 $\operatorname{im} f = F$

于是 $\dim \ker f = n - 1$

取$\overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}, \dots, \overrightarrow{e_n}$为 $\ker f$ 的一组基, 并扩充一个向量$\overrightarrow{e_1}'$

使得$\overrightarrow{e_1}', \overrightarrow{e_2}, \dots, \overrightarrow{e_n}$为$V$的一组基

$\because \overrightarrow{e_1}' \notin \ker f$ 则$f(\overrightarrow{e_1}') \neq 0$ 令$\overrightarrow{e_1} = \dfrac{1}{f(\overrightarrow{e_1}')}\overrightarrow{e_1}'$

则$f(\overrightarrow{e_1}) = 1$

于是$f(x_1\overrightarrow{e_1} + \cdots + x_n\overrightarrow{e_n}) = x_1 f(\overrightarrow{e_1}) + \sum_{i=2}^{n} x_i f(e_i) = x_1$ ■

【6-5】合同规范型的行列变换算法

已经证明了若A对称,则一定存在可逆方阵

使得$C^tAC=D=\mathrm{diag}(d_1,\dots,d_r,0,\dots,0)$, $\mathrm{d}_1,\dots,d_r\in F$

考虑分块矩阵

$$\begin{pmatrix}C&O\\O&E\end{pmatrix}^t\begin{pmatrix}A&E\\E&O\end{pmatrix}\begin{pmatrix}C&O\\O&E\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}C^t&O\\O&E\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A&E\\E&O\end{pmatrix}\begin{pmatrix}C&O\\O&E\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}C^tAC&C^t\\C&O\end{pmatrix}$$

$\begin{pmatrix}A&E\\E&O\end{pmatrix}$右乘$\begin{pmatrix}C&O\\O&E\end{pmatrix}$相当于对$\begin{pmatrix}A&E\\E&O\end{pmatrix}$的前$n$列做了一系列列变换

$\begin{pmatrix}A&E\\E&O\end{pmatrix}$左乘$\begin{pmatrix}C&O\\O&E\end{pmatrix}^t$相当于对$\begin{pmatrix}A&E\\E&O\end{pmatrix}$的前$n$行做了相同的行变换

于是,若能对$\begin{pmatrix}A&E\\E&O\end{pmatrix}$做若干对相同的行列变换使左上角变为对角

则左上角为A的规范型,且左下角给出了C

特别地,可以只对$\begin{pmatrix}A\\E\end{pmatrix}$作变换

例:设$A=\begin{pmatrix}1&1&-2\\1&5&0\\-2&0&4\end{pmatrix}$,求$C$使得$C^tAC$为对角矩阵

$$\begin{pmatrix}1&1&-2\\1&5&0\\-2&0&4\\1&&\\&1&\\&&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&-2\\0&4&2\\-2&2&4\\1&-1&\\&1&\\&&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0\\0&4&2\\0&2&0\\1&-1&2\\&1&\\&&1\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}1&0&0\\0&4&0\\0&0&-1\\1&-1&5/2\\&1&-1/2\\&&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0\\0&4&0\\0&0&-4\\1&-1&5\\&1&-1\\&&2\end{pmatrix}$$

注意,乘以一个常数也需要对上方矩阵做两次

即可取$C=\begin{pmatrix}1&-1&5\\0&1&-1\\0&0&2\end{pmatrix}$, $C^tAC=\begin{pmatrix}1&&\\&4&\\&&-4\end{pmatrix}$

【7-1】二次型矩阵换基的转换公式

设三维线性空间V上的双线性型f在基$\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2},\overrightarrow{e_3}$下矩阵为$\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{pmatrix}$

求f在另一组基$\overrightarrow{\varepsilon_1},\overrightarrow{\varepsilon_2},\overrightarrow{\varepsilon_3}$下的矩阵

其中$\overrightarrow{\varepsilon_1}=\overrightarrow{e_1}-\overrightarrow{e_2},\qquad \overrightarrow{\varepsilon_2}=\overrightarrow{e_1}+\overrightarrow{e_3},\qquad \overrightarrow{\varepsilon_3}=\overrightarrow{e_1}+\overrightarrow{e_2}+\overrightarrow{e_3}$

解: 已证若$\{\overrightarrow{e_i}\}$到$\{\overrightarrow{\varepsilon_i}\}$的转换矩阵为$C$

即$(\overrightarrow{\varepsilon_1},\dots,\overrightarrow{\varepsilon_n})=(\overrightarrow{e_1},\dots,\overrightarrow{e_n})C$

且双线性型f在$\{\overrightarrow{e_i}\}$下矩阵为A,

则f在$\{\overrightarrow{\varepsilon_i}\}$下矩阵为$C^tAC$

此处$C=\begin{pmatrix}1&1&1\\-1&0&1\\0&1&1\end{pmatrix},A=\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{pmatrix}$

则f在$\{\overrightarrow{\varepsilon_i}\}$下矩阵为$C^tAC=\begin{pmatrix}0&-6&-9\\-2&20&30\\-3&30&45\end{pmatrix}$

【7-2】对称矩阵秩 1 分解

求证: 秩为r的对称矩阵可以写成r个秩为 1 的对称矩阵之和

证: 令C可逆使得$C^tAC=\operatorname{diag}(d_1,\dots,d_r,0,\dots,0)=D_1+\dots+D_r$

其中$D_i=\operatorname{diag}(0,\dots,0,d_i,0,\dots,0)$, 则$\operatorname{rank}D_i=1$

则$A=(C^{-1})^t(D_1+\dots+D_r)C^{-1}$

$=(C^{-1})^tD_1C^{-1}+\dots+(C^{-1})^tD_rC^{-1}$

注意$\operatorname{rank}((C^{-1})^tD_iC^{-1})=\operatorname{rank}D_i=1$

于是命题得证 ∎

【7-3】复合二次型惯性指数减小

设$f(\vec{x})=l_1^2(\vec{x})+\cdots+l_s^2(\vec{x})-l_{s+1}^2(\vec{x})-\cdots-l_{s+t}^2(\vec{x})$为$\mathbb{R}^n$上二次型

其中$l_i(\vec{x})=a_{i1}x_1+\cdots+a_{in}x_n$

求证:f的正惯性指数$\leq s$

证:根据惯性定理,一定存在一个可逆线性变换T,使得$\vec{y}=T\vec{x}$

线性变换将f化为规范型,p,q为f的正、负惯性指数

即$f(T^{-1}\vec{y})=f(\vec{x})\Rightarrow$

$y_1^2+\cdots+y_p^2-y_{p+1}^2-\cdots-y_{p+q}^2$

$=l_1^2(\vec{x})+\cdots+l_s^2(\vec{x})-l_{s+1}^2(\vec{x})-l_{s+t}^2(\vec{x})\quad[*]$

假设$p>s$,则考虑到$l_1(\vec{x})=\cdots=l_s(\vec{x})=0=y_{p+1}=\cdots y_n$

是关于n个变元$x_1,\ldots,x_n$的齐次线性方程组,方程数为$s+n-p$

而$s-p<0\Rightarrow s+n-p<n\Rightarrow$ 方程组有非零解$\overrightarrow{x_0}$

对$[*]$式两端应用$\overrightarrow{x_0}$,设$\overrightarrow{y_0}=T\overrightarrow{x_0}\neq\vec{0}$

得$y_{01}^2+\cdots+y_{0p}^2=-l_{s+1}^2(\vec{x})-l_{s+t}^2(\vec{x})$

只能有$y_{01}=\cdots=y_{0p}=0\Rightarrow\vec{y}=0$,矛盾

因此假设不成立,$p\leq s$ ■

【8-1】二次型与对偶空间

设V是F上的有限维线性空间,$f \in \mathcal{L}_2(V,F)$

令$\varphi: V \to V^*, \vec{v} \to f_v$,其中$f_v(\vec{x}) = f(\vec{x},\vec{v})$,证明:

$(i)\varphi$是线性映射

$(ii)\ \dim_F \operatorname{im}\varphi = \operatorname{rank} f$

$(iii)\varphi$是线性同构 $\Leftrightarrow \operatorname{rank} f = \dim_F V$

证:由于f对第二个变量线性,则φ是良定义的映射

$(i)\forall\vec{x},\qquad f_{av+bw}(\vec{x}) = f(\vec{x}, a\vec{v} + b\vec{w}) = af(\vec{x},\vec{v}) + bf(\vec{x},\vec{w})$

$= (af_v + bf_w)(\vec{x})$

$\Rightarrow \varphi(a\vec{v} + b\vec{w}) = f_{av+bw} = af_v + bf_w = a\varphi(\vec{v}) + b\varphi(\vec{w})$

$\therefore \varphi$线性

(ii)取V的一组基$\{\vec{e_i}\}$

则由于φ线性,故有 $\operatorname{im}\varphi = \langle \varphi(\vec{e_1}), \dots, \varphi(\vec{e_n})\rangle = \left\langle f_{e_1}, \dots, f_{e_n}\right\rangle \subseteq V^*$

由第一章推论 9.4, $\dim\operatorname{im}\varphi = \operatorname{rank}\left(f_{e_i}\left(\vec{e_j}\right)\right) = \operatorname{rank} f\left(\vec{e_i},\vec{e_j}\right) = \operatorname{rank} f$

$(iii) \Leftarrow$: 由(ii), $\operatorname{rank} f = \dim\operatorname{im}\varphi$

由条件, $\operatorname{rank} f = \dim V$

而V有限维,则 $\dim V = \dim V^*$

则 $\dim\operatorname{im}\varphi = \dim V^*$, $\because \operatorname{im}\varphi \subseteq V^* \quad \therefore \operatorname{im}\varphi = V^*$

即φ是满射,且 $\dim\ker\varphi = \dim V - \dim\operatorname{im}\varphi = 0 \Rightarrow \ker\varphi = \left\{\vec{0}\right\}$

则φ是单射,从而φ是线性同构

$\Rightarrow$: φ线性同构 $\Rightarrow \varphi$满射 $\Rightarrow \dim\operatorname{im}\varphi = \dim V^* = \dim V$

由(ii), $\operatorname{rank} f = \dim\operatorname{im}\varphi \Rightarrow \operatorname{rank} f = \dim V \quad ■$

【8-2】合同关系等价类个数

已知合同关系是$S_n(\mathbb{R})\big(n$阶对称矩阵$\big)$上的等价关系

试问这个关系有多少个等价类?

解: 由惯性定理, 两个n阶实对称矩阵合同

$\Leftrightarrow$ 它们有相同的秩和正惯性指数

则合同关系的等价类由秩和正惯性指数刻画

秩 $0-$ 正惯性指数 $0 \Rightarrow 1$ 类

秩 $1-$ 正惯性指数 $0,1 \Rightarrow 2$ 类

....

秩$r-$ 正惯性指数 $0,1,\ldots,r \Rightarrow r+1$ 类

...

秩$n-$ 正惯性指数 $0,1,\ldots,n \Rightarrow n+1$ 类

因此共有$\dfrac{(n+1)(n+2)}{2}$类

【8-3】Jacobi 公式应用

用$Jacobi$公式, 求下列二次型的规范型

$$q(\vec{x})=\sum_{i=1}^{n} x_i^2+\sum_{1\le i<j\le n} x_i x_j$$

解: 易知q在标准基下的矩阵为$A=\begin{pmatrix} 1 & 1/2 & \cdots & 1/2 \\ 1/2 & 1 & \cdots & 1/2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1/2 & 1/2 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$

由$Jacobi$公式, 只要 $\triangle_k=\triangle_k\ (A)\neq 0, k=1,\ldots,n$

则q有规范型$q(\vec{y})=\frac{\triangle_1}{\triangle_0}y_1^2+\cdots+\frac{\triangle_n}{\triangle_{n-1}}y_n^2$

下面计算 $\triangle_k(A)$. 注意到相似性, 只需计算 $\triangle_n(A)=f(n)$

则 $\triangle_k(A)=f(k)$

又 $\triangle_n(A)=|A|=\begin{vmatrix}1 & 1/2 & \cdots & 1/2\\ 1/2 & 1 & \cdots & 1/2\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 1/2 & 1/2 & \cdots & 1\end{vmatrix}$

$$=\begin{vmatrix}1 & 1/2 & \cdots & 1/2 & 0\\ 1/2 & 1 & \cdots & 1/2 & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & 0\\ 1/2 & 1/2 & \cdots & 1 & 0\\ 1/2 & 1/2 & \cdots & 1/2 & 1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1/2 & 0 & \cdots & 0 & -1\\ 0 & 1/2 & \cdots & 0 & -1\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & 1/2 & -1\\ 1/2 & 1/2 & \cdots & 1/2 & 1\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}1/2 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & 1/2 & \cdots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & 1/2 & 0\\ 1/2 & 1/2 & \cdots & 1/2 & n+1\end{vmatrix}=\frac{n+1}{2^n}$$

则 $\triangle_k=\frac{k+1}{2^k}$, 于是$q$有规范型$q(\vec{y})=y_1^2+\frac{3}{4}y_2^2+\cdots+\frac{n+1}{2^n}y_n^2$

注: 规范基$\overrightarrow{\varepsilon_1},\dots,\overrightarrow{\varepsilon_n}$与标准基的转换矩阵为

$$\begin{pmatrix}1 & -1/2 & -1/3 & \cdots & -1/n\\ & 1 & -1/3 & \cdots & -1/n\\ & & 1 & \cdots & -1/n\\ & & & \ddots & \vdots\\ & & & & 1\end{pmatrix}$$

【8-4】二次型在基上取 0 及物理意义

设q是$\mathbb{R}^n$上的二次型, 且存在$\vec{x},\vec{y}\in\mathbb{R}^n$, 使得$q(\vec{x})>0, q(\vec{y})<0$

试证存在$\vec{z}\in\mathbb{R}^n,\vec{z}\neq 0$ 使得$q(\vec{z})=0$

证: 由惯性定理, 存在一组基$\overrightarrow{\varepsilon_1},\dots,\overrightarrow{\varepsilon_n}$使得若$\vec{v}=v_1\overrightarrow{\varepsilon_1}+\cdots+v_n\overrightarrow{\varepsilon_n}$

则$q(v_1,\dots,v_n)=v_1^2+\cdots+v_s^2-v_{s+1}^2-\cdots-v_{s+t}^2$

现在存在$\vec{x},\vec{y}$使得$q(\vec{x})>0, q(\vec{y})<0$, 则$s,t>0$

于是不妨取$\vec{z}=\overrightarrow{\varepsilon_1}-\overrightarrow{\varepsilon_{s+1}}$, 即$v_1=1, v_{s+1}=-1$, 其他坐标$=0$

从而$q(\vec{z})=1^2+0+\cdots+0-1^2-0-\cdots-0=0$,且$\vec{z}\neq\vec{0}$ ■

另外,记$r:=\operatorname{rank}q=s+t$,考虑$\overrightarrow{\varepsilon_k}$, $\quad k\in\{r+1,\ldots,n\}$

令$\overrightarrow{\alpha_{ij}}=\overrightarrow{\varepsilon_i}+\overrightarrow{\varepsilon_j},\overrightarrow{\beta_{ij}}=\overrightarrow{\varepsilon_i}-\overrightarrow{\varepsilon_j}$, $\quad i\in\{1,\ldots,s\},j\in\{s+1,\ldots,t\}$

于是自然有$q\left(\overrightarrow{\alpha_{ij}}\right)=q\left(\overrightarrow{\beta_{ij}}\right)=q(\overrightarrow{\varepsilon_k})=0$

注意,由于$\overrightarrow{\varepsilon_i}=\dfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{\alpha_{ij}}+\overrightarrow{\beta_{ij}}\right),\overrightarrow{\varepsilon_j}=\dfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{\alpha_{ij}}-\overrightarrow{\beta_{ij}}\right)$,

$i\in\{1,\ldots,s\},j\in\{s+1,\ldots,t\}$

从而$\left\{\overrightarrow{\alpha_{ij}},\overrightarrow{\beta_{ij}},\overrightarrow{\varepsilon_k}\right\}$与$\{\overrightarrow{\varepsilon_1},\ldots,\overrightarrow{\varepsilon_n}\}$等价

于是可以从$\left\{\overrightarrow{\alpha_{ij}},\overrightarrow{\beta_{ij}},\overrightarrow{\varepsilon_k}\right\}$中取出$n$个线性无关的向量

从而在$\left\{\overrightarrow{\alpha_{ij}},\overrightarrow{\beta_{ij}},\overrightarrow{\varepsilon_k}\right\}$中有一组基$\{\eta_i\}$,使得$q(\eta_i)=0,i=1,\ldots,n$

物理意义:考虑向量空间$\mathbb{R}^4$,其中向量$\vec{v}=(t,x,y,z)$

由光速不变原理,在其上考虑二次型$g(\vec{v})=c^2t^2-x^2-y^2-z^2$

或其配极$g(\vec{v},\vec{v}')=c^2tt'-xx'-yy'-zz'$,其中$c$为光速常数

则将$(\mathbb{R}^4,g)=\mathbb{R}^{1,3}$称为$Minkowski$时空

对$\vec{v}\in\mathbb{R}^{1,3},g(\vec{v})>0\Rightarrow$称$\vec{v}$为类时向量

类时指的是能花时间办到的事

$g(\vec{v})=0\Rightarrow$称$\vec{v}$为类光向量(迷向向量),就是光

$g(\vec{v})<0\Rightarrow$称$\vec{v}$为类空向量

所谓类空就是花时间也办不到的事,除非超过光速

$LC=\{\vec{v}\in\mathbb{R}^{1,3}|g(\vec{v})=0\}=\{\vec{v}|(ct)^2=x^2+y^2+z^2\}$

$=\{\vec{v}|(ct)^2=x^2+y^2+z^2,t\geq 0\}\cup\{\vec{v}|(ct)^2=x^2+y^2+z^2,t\leq 0\}$

$:=LC_+\cup LC_-$

LC称为光锥,LC_+称为未来光锥,LC_-称为过去光锥

【9-1】正定求参数范围

求λ,μ的范围,使得矩阵$\begin{pmatrix}1&\lambda&\lambda\\\lambda&1&\lambda\\\lambda&\lambda&1\end{pmatrix}$,$\begin{pmatrix}1&1&\mu\\1&\mu&1\\\mu&1&1\end{pmatrix}$正定

$Sylvester$法: 设$A=\begin{pmatrix}1&\lambda&\lambda\\\lambda&1&\lambda\\\lambda&\lambda&1\end{pmatrix}$

$\triangle_1(A)=1>0$

$\triangle_2(A)=1-\lambda^2>0$

$\triangle_3(A)=|A|=(1-\lambda)^2(2\lambda+1)>0$

解得$\lambda\in\left(-\frac{1}{2},1\right)$

行列变换法: 设$B=\begin{pmatrix}1&1&\mu\\1&\mu&1\\\mu&1&1\end{pmatrix}$

进行如习题 $6-5$ 的行列变换操作

得到规范型为$\operatorname{diag}(1,\mu-1,2-\mu-\mu^2)$

则A正定$\Leftrightarrow\begin{cases}\mu-1>0\\2-\mu-\mu^2>0\end{cases}$, μ不存在

【9-2】正定与二次型模长的上下界

证明: 设A是实对称矩阵, 则

(i)存在正实数t, 使得$tE \pm A$正定

(ii)存在正实数$C > 0$, 使得$|\vec{x}^t A \vec{x}| \leq C \vec{x}^t \vec{x}$

证: (i) $Sylvester$判别法

设$A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$, 则$tE \pm A = (t\delta_{ij} \pm a_{ij})$

$$\text{考虑} \triangle_k (tE \pm A) = \begin{vmatrix} t \pm a_{11} & \pm a_{12} & \cdots & \pm a_{1k} \\ \pm a_{21} & t \pm a_{22} & \cdots & \pm a_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \pm a_{k1} & \pm a_{k2} & \cdots & t \pm a_{kk} \end{vmatrix}$$

于是 $\triangle_k (tE \pm A) = t^k \pm (a_{11} + \cdots + a_{kk}) t^{k-1} + \cdots + \triangle_k (\pm A)$

注意 $\triangle_k (tE \pm A)$是t的k次多项式函数, 且首项系数为 1

则存在 $2n$个正实数$t_{k,\pm} > 0, k = 1,2, \dots, n$

使得只要$t > t_{k,\pm}$, 则 $\triangle_k (tE \pm A) > 0$

因此取$t = \max\{t_{k,\pm}\} + 1$, 则有 $\triangle_k (tE \pm A) > 0, k = 1, .., n$

由此得$tE \pm A$都正定

(ii)取C为(i)中的t, 则由正定的定义, $\begin{cases} \vec{x}^t (CE + A) \vec{x} \geq 0 \\ \vec{x}^t (CE - A) \vec{x} \geq 0 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} \vec{x}^t A \vec{x} \geq -C \vec{x}^t \vec{x} \\ \vec{x}^t A \vec{x} \leq C \vec{x}^t \vec{x} \end{cases} \Rightarrow |\vec{x}^t A \vec{x}| \leq C \vec{x}^t \vec{x}$ ■

注: 事实上$(i)(ii)$本质是一道题, 但是(ii)的视角不同

用数学分析法解: 考虑$q(\vec{x}) = \vec{x}^t A \vec{x}, \vec{x} \in S = \left\{ \vec{x} \in \mathbb{R}^n \middle| |x| = \sqrt{\vec{x}^t \vec{x}} = 1 \right\}$

则S是有界闭集, 从而是紧集.

而q是S上的连续函数, 则$|q|$在S上有最大值C

即$\forall \vec{x} \in S, |q(\vec{x})| \leq C$

对$\vec{x} \neq 0, \dfrac{\vec{x}}{|\vec{x}|} \in S$, 则 $\left| q\left(\dfrac{\vec{x}}{|\vec{x}|} \right) \right| = \dfrac{|q(\vec{x})|}{\vec{x}^t \vec{x}} \leq C \Rightarrow |q(\vec{x})| \leq C \vec{x}^t \vec{x}$ ■

【9-3】矩阵空间上的二次型

(i)证明$q(A)=\mathrm{tr}(A^tA)$是$M_n(\mathbb{R})$上的正定二次型

(ii)若$AA^t=A^2$,求证A是对称矩阵

证:(i)设$f(A,B)=\mathrm{tr}(A^tB)$

$\because \mathrm{tr}\,A=\mathrm{tr}\,A^t \quad \therefore f(B,A)=\mathrm{tr}(B^tA)=\mathrm{tr}(A^tB)=f(A,B)$

$f(aA+bB,C)=\mathrm{tr}((aA+bB)^tC)=\mathrm{tr}(aA^tC+bB^tC)$

$=a\,\mathrm{tr}(A^tC)+b\,\mathrm{tr}(B^tC)=af(A,C)+bf(B,C)$

可知f是双线性形式. 由于$q(A)=\mathrm{tr}\,A^tA=f(A,A)$,可知$q$为二次型

设$A=(a_{ij})$,则$(A^tA)_{ij}=\sum\limits_{i=1}^{n}a_{ki}a_{kj}$

从而$\mathrm{tr}(A^tA)=\sum\limits_{i=1}^{n}(A^tA)_{ii}=\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{k=1}^{n}a_{ki}^2\geq 0$

则$q(A)=\mathrm{tr}(A^tA)\geq 0$,且$q(A)=0\Leftrightarrow a_{ki}=0,\forall i,k\in\{1,\ldots,n\}$

即$q(A)=0\Leftrightarrow A=0$,因此$q$正定

(ii)由于q正定,则$A=A^t\Leftrightarrow q(A-A^t)=0$

计算$q(A-A^t)=\mathrm{tr}\big((A^t-A)(A-A^t)\big)$

$=\mathrm{tr}(A^tA-(A^t)^2-A^2+AA^t)=\mathrm{tr}(A^tA-(A^t)^2)$

对条件取转置,得到$AA^t=(A^2)^t=(A^t)^2$

则$q(A-A^t)=\mathrm{tr}(A^tA-AA^t)=\mathrm{tr}(A^tA)-\mathrm{tr}(AA^t)$

$=\mathrm{tr}(A^tA)-\mathrm{tr}(A^tA)=0 \quad [\mathrm{tr}\,AB=\mathrm{tr}\,BA]$

因此$A=A^t$ ■

【9-4】半正定二次型的 Sylvester 判别法

设A实对称,则A半正定$\Leftrightarrow A$的所有主子式

$$A\begin{Bmatrix} i_1,\dots,i_k \\ i_1,\dots,i_k \end{Bmatrix}=\begin{vmatrix} a_{i_1i_1} & \cdots & a_{i_1i_k} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i_ki_1} & \cdots & a_{i_ki_k} \end{vmatrix}\geq 0$$

证:记$q_A(\vec{x})=\vec{x}^tA\vec{x}$为$A$对应的二次型

若B为任何半正定矩阵,则$B=P^tP\Rightarrow \det B=|\det P|^2\geq 0$ [*]

$\Rightarrow$: A半正定$\Rightarrow q_A$半正定,考虑$q_A\big|_V, V=\langle\overrightarrow{e_{\iota_1}},\dots,\overrightarrow{e_{\iota_k}}\rangle$

$q_A\big|_V$也是半正定的,且$q_A\big|_V$在$\{\overrightarrow{e_{\iota_1}},\dots,\overrightarrow{e_{\iota_k}}\}$下行列式恰为$A\begin{Bmatrix} i_1,\dots,i_k \\ i_1,\dots,i_k \end{Bmatrix}$

从而由$q_A\big|_V$半正定和[*]式可知$A\begin{Bmatrix} i_1,\dots,i_k \\ i_1,\dots,i_k \end{Bmatrix}\geq 0$

$\Leftarrow$:若所有主子式$A\begin{Bmatrix} i_1,\dots,i_k \\ i_1,\dots,i_k \end{Bmatrix}\geq 0$

考虑$f(t)=|tE+B|=t^n+a_1t^{n-1}+\cdots+a_n$

易验证$a_i=B$的所有i阶主子式之和

断言 若$t>0$,则$tE+A$正定

考虑$f_k(t)=|tE_k+A_k|, A_k$是A的左上角的$k\times k$方阵

由条件得$f_k(t)=t^k+a_{k1}t^{k-1}+\cdots+a_{kk}$满足$a_{ki}\geq 0, i=1,\dots,k$

所以$\forall t>0, f_k(t)>0, k=1,\dots,n$

所以由$Sylvester$判别法,对$t>0, tE+A$正定

于是由正定的定义,$t>0,\forall\vec{x}\in\mathbb{R}^n\setminus\{\vec{0}\},\vec{x}^t(tE+A)\vec{x}>0$

取极限$t\to 0^+$,则有$\vec{x}^tA\vec{x}\geq 0,\forall\vec{x}\in\mathbb{R}^n$,即$A$半正定 ■

【10-1】线性映射矩阵换基公式

设$\varphi: P_3 \to P_3$在$\{1, x, x^2\}$下的矩阵表示为$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

求φ在$\{3x^2+2x+1, x^2+3x+2, 2x^2+x+3\}$

解: 已证φ在$\overrightarrow{e_1}, \dots, \overrightarrow{e_n}$下的矩阵为$A$, 在$\overrightarrow{\varepsilon_1}, \dots, \overrightarrow{\varepsilon_n}$下的矩阵为$B$

转换矩阵T满足$(\overrightarrow{\varepsilon_1}, \dots, \overrightarrow{\varepsilon_n}) = (\overrightarrow{e_1}, \dots, \overrightarrow{e_n})T$

则$B = T^{-1}AT$

此处$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

从而$B = T^{-1}AT = \begin{pmatrix} -1/3 & 2/3 & 2/3 \\ 2/3 & 2/3 & -1/3 \\ 2/3 & -1/3 & 2/3 \end{pmatrix}$计算过程略

【10-2】维数相关的公式

(i)子空间的维数公式: 若$U, W \subseteq V$是线性子空间

则$\dim U + \dim W = \dim(U+W) + \dim(U \cap W)$

(ii)线性映射的维数公式: 设$\varphi: V \to W$是线性映射

则$\dim V = \dim \operatorname{im} \varphi + \dim \ker \varphi = \operatorname{rank} \varphi + \dim \ker \varphi$ (与W无关!)

(iii)维数不等式: 若U是V的子空间, 则$\dim U \leq \dim V$

【10-3】线性算子复合后的秩差

证明: 对V上的任意线性算子$\mathcal{A},\mathcal{B}$ 有等式

$\operatorname{rank}\mathcal{A} = \operatorname{rank}\mathcal{B}\mathcal{A} + \dim(\operatorname{im}\mathcal{A} \cap \ker\mathcal{B})$

证: 由于$\mathcal{A}$是线性空间V上的线性映射

则$W = \operatorname{im}\mathcal{A}$ 是V的子空间

考虑 $\mathcal{B}$ 在W上的限制$\mathcal{T} = \mathcal{B}\big|_W: W \to V$

即$\forall\vec{w} \in W, \mathcal{T}(\vec{w}) = \mathcal{B}(\vec{w}) \in V$

于是$(a)\ \operatorname{im}\mathcal{T} = \{\mathcal{T}(\vec{w})|\vec{w} \in \operatorname{im}\mathcal{A}\} = \{\mathcal{B}(\vec{w})|\vec{w} \in \operatorname{im}\mathcal{A}\}$

$= \{\mathcal{B}(\mathcal{A}\vec{v})|\vec{v} \in V\} = \operatorname{im}\mathcal{B}\mathcal{A}$

从而 $\operatorname{rank}\mathcal{T} = \operatorname{rank}\mathcal{B}\mathcal{A}$

$(b)\ \ker\mathcal{T} = \left\{\vec{w} \in \operatorname{im}\mathcal{A}\ \middle|\mathcal{T}(\vec{w}) = \vec{0}\right\}$

$= \left\{\vec{w} \in \operatorname{im}\mathcal{A}\ \middle|\mathcal{B}(\vec{w}) = \vec{0}\right\} = \operatorname{im}\mathcal{A} \cap \ker\mathcal{B}$

从而 $\dim\ker\mathcal{T} = \dim(\operatorname{im}\mathcal{A} \cap \ker\mathcal{B})$

于是对$\mathcal{T}$使用维数公式 $\dim W = \operatorname{rank}\mathcal{T} + \dim\ker\mathcal{T}$

得到 $\operatorname{rank}\mathcal{A} = \operatorname{rank}\mathcal{B}\mathcal{A} + \dim(\operatorname{im}\mathcal{A} \cap \ker\mathcal{B})$ ■

【10-4】核空间运算的包含关系

证明: $(i)\ \ker\mathcal{A} \cap \ker\mathcal{B} \subseteq \ker(\mathcal{A} + \mathcal{B})$

$(ii)\ \ker\mathcal{A} + \ker\mathcal{B} \subseteq \ker\mathcal{A}\mathcal{B}$

证: (i)若$\vec{x} \in \ker\mathcal{A} \cap \ker\mathcal{B}$, 则$\vec{x} \in \ker\mathcal{A}$ 且$\vec{x} \in \ker\mathcal{B}$

则$\mathcal{A}\vec{x} = \vec{0}, \mathcal{B}\vec{x} = \vec{0}$, 从而$(\mathcal{A} + \mathcal{B})\vec{x} = \mathcal{A}\vec{x} + \mathcal{B}\vec{x} = \vec{0}$

即$\vec{x} \in \ker(\mathcal{A} + \mathcal{B})$ 因此 $\ker\mathcal{A} \cap \ker\mathcal{B} \subseteq \ker(\mathcal{A} + \mathcal{B})$

(ii)若$\vec{x} \in \ker\mathcal{A} + \ker\mathcal{B}$, 则$\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$且$\mathcal{A}\vec{y} = \vec{0}, \mathcal{B}\vec{z} = \vec{0}$

于是$\mathcal{A}\mathcal{B}\vec{x} = \mathcal{A}\mathcal{B}\vec{y} + \mathcal{A}\mathcal{B}\vec{z} = \mathcal{A}\mathcal{B}\vec{y} = \mathcal{B}\mathcal{A}\vec{y} = \vec{0}$

即$\vec{x} \in \ker\mathcal{A}\mathcal{B}$ 因此 $\ker\mathcal{A} + \ker\mathcal{B} \subseteq \ker\mathcal{A}\mathcal{B}$ ■

【mid-1】域特征对基的影响

设F是域,$\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2},\overrightarrow{e_3},\overrightarrow{e_4}$是$F$上线性空间$V$的一组基

令$\overrightarrow{\varepsilon_1}=\overrightarrow{e_1}+\overrightarrow{e_2},\qquad \overrightarrow{\varepsilon_2}=-\overrightarrow{e_1}+\overrightarrow{e_2},\qquad \overrightarrow{\varepsilon_3}=2\overrightarrow{e_3}+\overrightarrow{e_4},\qquad \overrightarrow{\varepsilon_4}=\overrightarrow{e_3}+\overrightarrow{e_4}$

当F的特征为何值时,$\overrightarrow{\varepsilon_1},\overrightarrow{\varepsilon_2},\overrightarrow{\varepsilon_3},\overrightarrow{\varepsilon_4}$不是$V$的一组基?

解: 从$\{\overrightarrow{e_i}\}$到$\{\overrightarrow{\varepsilon_i}\}$的转换矩阵为$A=\begin{pmatrix}1&-1&0&0\\1&1&0&0\\0&0&2&-1\\0&0&1&1\end{pmatrix}$

由于$\det A=6=2\times 3$,则若$\operatorname{char}F=2$ 或 3 时,$\det A=0$

从而$(\overrightarrow{\varepsilon_1},\overrightarrow{\varepsilon_2},\overrightarrow{\varepsilon_3},\overrightarrow{\varepsilon_4})$不是一组基

【mid-2】商空间的基代表元可作为基

设V是F上的线性空间,U是V的子空间,设U的一组基是$\overrightarrow{v_1},\dots,\overrightarrow{v_d}$

商空间$V/_U$的一组基$\overrightarrow{v_{d+1}}+U,\dots,\overrightarrow{v_n}+U$

证明:$\overrightarrow{v_1},\dots,\overrightarrow{v_d},\overrightarrow{v_{d+1}},\dots,\overrightarrow{v_n}$是$V$的一组基

证: 记$\pi: V\to V/_U$为自然投影

(i)先证线性无关

令$a_1\overrightarrow{v_1}+\cdots+a_n\overrightarrow{v_n}=0$

$\pi(a_1\overrightarrow{v_1}+\cdots+a_n\overrightarrow{v_n})=\vec{0}+U$

而$\pi(a_1\overrightarrow{v_1}+\cdots+a_n\overrightarrow{v_n})=a_1(\overrightarrow{v_1}+U)+\cdots+a_n(\overrightarrow{v_n}+U)$

$=a_{d+1}(\overrightarrow{v_{d+1}}+U)+\cdots+a_n(\overrightarrow{v_n}+U)$

则由$\{\overrightarrow{v_{d+1}}+U,\dots,\overrightarrow{v_n}+U\}$为$V/_U$的一组基可知$a_{d+1}=\cdots=a_n=0$

则有$a_1\overrightarrow{v_1}+\cdots+a_d\overrightarrow{v_d}=\vec{0}$

由$\overrightarrow{v_1},\dots\overrightarrow{v_d}$为$U$的一组基得$a_1=\cdots=a_d=0$

从而$\overrightarrow{v_1},\dots,\overrightarrow{v_n}$线性无关

(ii)再证$V=\langle\overrightarrow{v_1},\dots,\overrightarrow{v_n}\rangle$

$\forall\vec{v}\in V$,考虑$\pi(\vec{v})=\vec{v}+U$,则由$\{\overrightarrow{v_{d+1}}+U,\dots,\overrightarrow{v_n}+U\}$为$V/_U$的基

可知存在$a_{d+1},\dots,a_n$

使得$\vec{v}+U=a_{d+1}(\overrightarrow{v_{d+1}}+U)+\cdots+a_n(\overrightarrow{v_n}+U)$

$=(a_{d+1}\overrightarrow{v_{d+1}}+\cdots+a_n\overrightarrow{v_n})+U$

从而$\vec{v}-(a_{d+1}\overrightarrow{v_{d+1}}+\cdots+a_n\overrightarrow{v_n})\in U$

又$U=\langle\overrightarrow{v_1},\dots,\overrightarrow{v_d}\rangle$,则存在$a_1,\dots,a_d$使得

$\vec{v}-a_{d+1}\overrightarrow{v_{d+1}}-\cdots-a_n\overrightarrow{v_n}=a_1\overrightarrow{v_1}+\cdots+a_d\overrightarrow{v_d}$

$\Rightarrow\vec{v}=a_1\overrightarrow{v_1}+\cdots+a_n\overrightarrow{v_n}$

则$V=\langle\overrightarrow{v_1},\dots,\overrightarrow{v_n}\rangle$

综上,$\{\overrightarrow{v_1},\dots,\overrightarrow{v_n}\}$是$V$的一组基 ■

【mid-3】子空间维数公式的应用

设V_1,V_2,V_3是线性空间V的三个k维子空间,其中$k>1$

设$\dim(V_1\cap V_2)=\dim(V_2\cap V_3)=\dim(V_3\cap V_1)=k-1$

(i)证明$\dim(V_1+V_2)=\dim(V_2+V_3)=\dim(V_3+V_1)=k+1$

(ii)证明$\dim(V_1\cap V_2\cap V_3)=k-1$ 或 $\dim(V_1+V_2+V_3)=k+1$

证: (i)利用维数公式,

$\dim V_i+\dim V_j=\dim\left(V_i+V_j\right)+\dim\left(V_i\cap V_j\right), i\neq j, i,j\in\{1,2,3\}$

得 $2k=\dim\left(V_i+V_j\right)+k-1\Rightarrow\dim\left(V_i+V_j\right)=k+1$

(ii)令$U = V_2 + V_3$,由维数公式得

$\dim(V_1 + U) = \dim V_1 + \dim U - \dim(V_1 \cap U)$

$= 2k + 1 - \dim(V_1 \cap U) \quad [*]$

$k - 1 = \max\limits_{i=2,3}\{\dim(V_1 \cap V_i)\} \leq \dim(V_1 \cap U) \leq \min\{\dim V_1, \dim U\} = k$

若$\dim(V_1 \cap U) = k - 1$,则$V_1 \cap (V_2 + V_3) = V_1 \cap V_2 = V_1 \cap V_3$

则$V_1 \cap V_2 \cap V_3 = V_1 \cap V_3 \Rightarrow \dim(V_1 \cap V_2 \cap V_3) = \dim(V_1 \cap V_3) = k - 1$

若$\dim(V_1 \cap U) = k$,则由维数公式[*],有$\dim(V_1 + V_2 + V_3) = k + 1$ ■

【12-1】迹与行列式和特征值的联系

证明:n阶方阵A可逆$\Leftrightarrow A$的所有特征值都非零

证:$\mathcal{X}_A(t) = |tE - A| = (t - \lambda_1) \cdots (t - \lambda_n)$

则$\mathcal{X}_A(0) = \det(-A) = (-1)^n \det A$

而$\mathcal{X}_A(0) = (-\lambda_1) \cdots (-\lambda_n) = (-1)^n \lambda_1 \cdots \lambda_n$

则有$\det A = \lambda_1 \cdots \lambda_n$

从而A可逆$\Leftrightarrow \det A \neq 0 \Leftrightarrow \forall i \in \{1, \dots, n\}, \lambda_i \neq 0$ ■

注:将$\mathcal{X}_A(t) = |tE - A|$按行列式定义展开,则

$\mathcal{X}_A(t) = t^n - (a_{11} + \cdots + a_{nn})^{t-1} + \cdots + (-1)^n \det A$

又$\mathcal{X}_A(t) = (t - \lambda_1) \cdots (t - \lambda_n)$

$= t^n - (\lambda_1 + \cdots + \lambda_n)t^{n-1} + \cdots + (-1)^n \lambda_1 \cdots \lambda_n$

则有$\begin{cases} \operatorname{tr} A = \lambda_1 + \cdots + \lambda_n \\ \det A = \lambda_1 \cdots \lambda_n \end{cases}$

【12-2】逆算子保不变子空间

证明: 如果$\mathcal{A}$是可逆线性算子,

则$\mathcal{A}$的不变子空间也是$\mathcal{A}^{-1}$的不变子空间

证: 令$W \subseteq V$是$\mathcal{A}$的不变子空间, 由定义有$\mathcal{A}W \subseteq W$

考虑$\mathcal{A}\big|_W: W \to W$ 作为W上的线性算子

由于$\mathcal{A}$为单射, 则$\mathcal{A}\big|_W$仍然单射

由维数公式$\dim \operatorname{im} \mathcal{A}\big|_W = \dim W - \dim \ker \mathcal{A}\big|_W = \dim W$

因此可知$\mathcal{A}\big|_W: W \to W$也是满射, 从而$\mathcal{A}W = W$

$\forall \vec{w} \in W$, 由于$\mathcal{A}W = W$, 则存在$\vec{v} \in W$ 使得$\vec{w} = \mathcal{A}\vec{v}$

则$\mathcal{A}^{-1}\vec{w} = \mathcal{A}^{-1}(\mathcal{A}\vec{v}) = \vec{v} \in W$, 即$\mathcal{A}^{-1}\vec{w} \in W$

故$\mathcal{A}^{-1}W \subseteq W$, 即$W$也是$\mathcal{A}^{-1}$的不变子空间 ■

【12-3】循环矩阵的特征值解法

设有下列复矩阵, 其中$a_0, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{C}$

$$A = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-2} \\ a_{n-2} & a_{n-1} & a_0 & \cdots & a_{n-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_0 \end{pmatrix}$$

(i)令$\xi = e^{\frac{2\pi i}{n}}, \varepsilon_k = \xi^k$

按照定义验证$\overrightarrow{v_k} = (1, \varepsilon_k, \dots, \varepsilon_k^{n-1})^t, k = 0, \dots, n-1$

是A的n个线性无关的特征向量, 并写出对应的特征值

(ii)求$\det A$

$$(i)\text{证}: A\overrightarrow{v_k} = \begin{pmatrix} a_0 + a_1\varepsilon_k + a_2\varepsilon_k^2 + \cdots + a_{n-1}\varepsilon_k^{n-1} \\ a_{n-1} + a_0\varepsilon_k + a_1\varepsilon_k^2 + \cdots + a_{n-2}\varepsilon_k^{n-1} \\ a_{n-2} + a_{n-1}\varepsilon_k + a_0\varepsilon_k^2 + \cdots + a_{n-3}\varepsilon_k^{n-1} \\ \vdots \\ a_1 + a_2\varepsilon_k + a_3\varepsilon_k^2 + \cdots + a_0\varepsilon_k^{n-1} \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} [a_0+a_1\varepsilon_k+a_2\varepsilon_k^2+\cdots+a_{n-1}\varepsilon_k^{n-1}]1 \\ [a_{n-1}\varepsilon_k^{-1}+a_0+a_1\varepsilon_k^1+\cdots+a_{n-2}\varepsilon_k^{n-2}]\varepsilon_k \\ [a_{n-2}\varepsilon_k^{-2}+a_{n-1}\varepsilon_k^{-1}+a_0+\cdots+a_{n-3}\varepsilon_k^{n-3}]\varepsilon_k^2 \\ \vdots \\ [a_1\varepsilon_k^{1-n}+a_2\varepsilon_k^{2-n}+a_3\varepsilon_k^{3-n}+\cdots+a_0]\varepsilon_k^{n-1} \end{pmatrix}$$

由于ε_k是一个n次单位根,即$\varepsilon_k^n=\xi^{nk}=1$

则$\varepsilon_k^{-j}=\varepsilon_k^{n-j},\forall j\in\mathbb{Z}$

从而令$f(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_{n-1}x^{n-1}$,有$A\overrightarrow{v_k}=f(\varepsilon_k)\overrightarrow{v_k}$

则知$\overrightarrow{v_k}$是A的以$f(\varepsilon_k)$为特征值的特征向量

考虑行列式$\det(\overrightarrow{v_0},\dots,\overrightarrow{v_{n-1}})$是一个范德蒙行列式,值不为零

$\therefore \overrightarrow{v_0},\dots,\overrightarrow{v_{n-1}}$线性无关 ■

(ii)由(i) $\det A=f(\varepsilon_0)\cdots f(\varepsilon_{n-1})$

【12-4】特征不等特征向量相加不特征

设$\mathcal{A}$为V上的线性算子,$\overrightarrow{v_1},\overrightarrow{v_2}$为$\mathcal{A}$的特征向量,对应的特征值为$\lambda_1,\lambda_2$

证明:若$\lambda_1\neq\lambda_2$,则$\overrightarrow{v_1}+\overrightarrow{v_2}$不是$\mathcal{A}$的特征向量

证:由条件得$\mathcal{A}\overrightarrow{v_1}=\lambda_1\overrightarrow{v_1},\mathcal{A}\overrightarrow{v_2}=\lambda_2\overrightarrow{v_2},\qquad \overrightarrow{v_1},\overrightarrow{v_2}\neq\vec{0}$

则$\mathcal{A}(\overrightarrow{v_1}+\overrightarrow{v_2})=\lambda_1\overrightarrow{v_1}+\lambda_2\overrightarrow{v_2}$

假设$\mathcal{A}(\overrightarrow{v_1}+\overrightarrow{v_2})=\lambda(\overrightarrow{v_1}+\overrightarrow{v_2})$

则$(\lambda_1-\lambda)\overrightarrow{v_1}+(\lambda_2-\lambda)\overrightarrow{v_2}=0$

$\because \lambda_1\neq\lambda_2\ \therefore \lambda_1-\lambda,\lambda_2-\lambda$不能同时为零

于是$\overrightarrow{v_1},\overrightarrow{v_2}$线性相关,设$\overrightarrow{v_1}=\alpha\overrightarrow{v_2},\alpha\neq 0$

则$\mathcal{A}\overrightarrow{v_1}=\lambda_1\overrightarrow{v_1}\Rightarrow\mathcal{A}(\alpha\overrightarrow{v_2})=\lambda_1(\alpha\overrightarrow{v_2})\Rightarrow\mathcal{A}\overrightarrow{v_2}=\lambda_1\overrightarrow{v_2}$

$\therefore \lambda_1=\lambda_2$,矛盾

因此$\overrightarrow{v_1}+\overrightarrow{v_2}$不是$\mathcal{A}$的特征向量 ■

【13-1】幂等算子的性质

证明: 设$\mathcal{A}$为V上的幂等线性算子($\mathcal{A}^2=\mathcal{A}$)则

$(i)\mathcal{B}=\mathcal{E}-\mathcal{A}$也幂等, 且$\mathcal{A}\mathcal{B}=\mathcal{B}\mathcal{A}$

(ii) $\operatorname{im}\mathcal{A}$ 是以 1 为特征值的特征子空间

$\ker\mathcal{A}$ 是以 0 位特征值的特征子空间

(iii) $\ker\mathcal{A}=\operatorname{im}\mathcal{B}$

$(iv)V=\operatorname{im}\mathcal{A}\oplus\ker\mathcal{A}=\operatorname{im}\mathcal{A}\oplus\operatorname{im}(\mathcal{E}-\mathcal{A})$

(v)若 $\operatorname{char}F=0$, 则 $\operatorname{rank}\mathcal{A}=\operatorname{tr}\mathcal{A}$

证: $(i)\forall\vec{v}\in V,\mathcal{B}^2\vec{v}=(\mathcal{E}-\mathcal{A})((\mathcal{E}-\mathcal{A})\vec{v})=(\mathcal{E}-\mathcal{A})(\vec{v}-\mathcal{A}\vec{v})$

$=\vec{v}-\mathcal{A}\vec{v}-\mathcal{A}\vec{v}+\mathcal{A}^2\vec{v}=\vec{v}-\mathcal{A}\vec{v}=(\mathcal{E}-\mathcal{A})\vec{v}=\mathcal{B}\vec{v}$

$\Rightarrow\mathcal{B}^2=\mathcal{B}$

$\mathcal{A}\mathcal{B}\vec{v}=\mathcal{A}\big((\mathcal{E}-\mathcal{A})\vec{v}\big)=\mathcal{A}(\vec{v}-\mathcal{A}\vec{v})=\mathcal{A}\vec{v}-\mathcal{A}^2\vec{v}=\vec{0}$

$\mathcal{B}\mathcal{A}\vec{v}=(\mathcal{E}-\mathcal{A})(\mathcal{A}\vec{v})=\mathcal{A}\vec{v}-\mathcal{A}^2\vec{v}=\vec{0}=\mathcal{A}\mathcal{B}\vec{v}$

$\therefore\mathcal{A}\mathcal{B}=\mathcal{B}\mathcal{A}=\mathcal{O}$

(ii)若$\vec{v}\in\operatorname{im}\mathcal{A}$ 则$\exists\vec{u}\in V$ 使得$\vec{v}=\mathcal{A}\vec{u}$

而$\mathcal{A}\vec{v}=\mathcal{A}(\mathcal{A}\vec{u})=\mathcal{A}^2\vec{u}=\mathcal{A}\vec{u}=\vec{v}\Rightarrow\vec{v}\in V^1$

则 $\operatorname{im}\mathcal{A}\subseteq V^1$

若$\vec{v}\in V^1$, 则$\mathcal{A}\vec{v}=\vec{v}$即$\vec{v}\in\operatorname{im}\mathcal{A}$, 因此$V^1\subseteq\operatorname{im}\mathcal{A}$

$\therefore V^1=\operatorname{im}\mathcal{A}$

$\ker\mathcal{A}=\ker(\mathcal{A}-0\mathcal{E})=V^0$恰好为$V^0$定义

(iii)若$\vec{v} \in \ker \mathcal{A}$, 则$\mathcal{A}\vec{v} = \vec{0}$, 则$\vec{v} = \vec{v} - \mathcal{A}\vec{v} = (\mathcal{E} - \mathcal{A})\vec{v} = \mathcal{B}\vec{v}$

$\Rightarrow \vec{v} \in \operatorname{im} \mathcal{B}$

若$\vec{v} \in \operatorname{im} \mathcal{B}$, 即$\exists \vec{u} \in V$使得$\vec{v} = \mathcal{B}\vec{u}$ 则$\mathcal{A}\vec{v} = \mathcal{A}\mathcal{B}\vec{u} = \vec{0}$

$\Rightarrow \vec{v} \in \ker \mathcal{A}$

$\therefore \ker \mathcal{A} = \operatorname{im} \mathcal{B}$

$(iv)\forall \vec{v} \in V, \vec{v} = (\vec{v} - \mathcal{A}\vec{v}) + \mathcal{A}\vec{v} = (\mathcal{E} - \mathcal{A})\vec{v} + \mathcal{A}\vec{v}$

因此$V \subseteq \operatorname{im} \mathcal{A} + \operatorname{im}(\mathcal{E} - \mathcal{A})$

而显然有$\operatorname{im} \mathcal{A} + \operatorname{im}(\mathcal{E} - \mathcal{A}) \subseteq V$

因此$V = \operatorname{im} \mathcal{A} + \operatorname{im}(\mathcal{E} - \mathcal{A})$,下面只需证直和

令$\vec{v} \in \operatorname{im} \mathcal{A} \cap \operatorname{im}(\mathcal{E} - \mathcal{A}) = \operatorname{im} \mathcal{A} \cap \ker \mathcal{A}$

则$\vec{v} \in \ker \mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{A}\vec{v} = \vec{0}$

$\vec{v} \in \operatorname{im} \mathcal{A} \Rightarrow \exists \vec{u} \in V$ 使得 $\mathcal{A}\vec{u} = \vec{v}$

则$\vec{0} = \mathcal{A}\vec{v} = \mathcal{A}^2\vec{u} = \mathcal{A}\vec{u} = \vec{v} \Rightarrow \vec{v} = \vec{0}$

故 $\operatorname{im} \mathcal{A} \cap \operatorname{im}(\mathcal{E} - \mathcal{A}) = \operatorname{im} \mathcal{A} \cap \ker \mathcal{A} = \{\vec{0}\}$

则$V = \operatorname{im} \mathcal{A} \oplus \operatorname{im}(\mathcal{E} - \mathcal{A}) = \operatorname{im} \mathcal{A} \oplus \ker \mathcal{A}$

(v)结合$(ii)(iv)$可知$V = V^0 \oplus V^1$

从而$\mathcal{A}$可对角化, 且特征值只有 0 或 1

则知$\mathcal{A}$在任何基下的矩阵A满足$A^2 = A$, 且A相似于$\begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix}$

$r = \dim V^1 = \dim \operatorname{im} \mathcal{A} = \operatorname{rank} \mathcal{A}$

于是$\operatorname{tr} \mathcal{A} = \operatorname{tr} A = r = \operatorname{rank} A = \operatorname{rank} \mathcal{A}$ ■

【13-2】矩阵乘方的计算

已知矩阵$A=\begin{pmatrix}2&0&0\\1&2&-1\\1&0&1\end{pmatrix}$, 求$A^k,k\geq 0$

方法: 若存在$P\in GL_n(F)$使得$A=P\operatorname{diag}(\lambda_1,\dots,\lambda_n)\,P^{-1}$

则$A^k=P\operatorname{diag}\left(\lambda_1^k,\dots,\lambda_n^k\right)P^{-1}$

解: $\mathcal{X}_A(t)=|tE-A|=\begin{vmatrix}t-2&0&0\\-1&t-2&1\\-1&0&t-1\end{vmatrix}=(t-2)^2(t-1)$

知A的特征值为 1 或 2

对$\lambda_1=1, A-\lambda_1E=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&-1\\1&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&-1\\0&0&0\end{pmatrix}$

可知$(A-\lambda_1E)\vec{v}=\vec{0}$有解 $\overrightarrow{v_1}=k(0,1,1)^t,k\neq 0$, 即$V^1=\langle(0,1,1)^t\rangle$

对$\lambda_2=2, A-\lambda_2E=\begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&-1\\1&0&-1\end{pmatrix}$

知$(A-\lambda_2E)\vec{v}=\vec{0}$有解$\overrightarrow{v_2}=k(0,1,0)^t,\overrightarrow{v_3}=l(1,0,1)^t,k,l\neq 0$

从而$V^2=\langle(0,1,0)^t,(1,0,1)^t\rangle$

进而由$V^1\oplus V^2$, 且$\dim V^1+\dim V^2=3$, 从而A可对角化

且令$P=(\overrightarrow{v_1},\overrightarrow{v_2},\overrightarrow{v_3})$, 则$AP=(A\overrightarrow{v_1},A\overrightarrow{v_2},A\overrightarrow{v_3})=(\overrightarrow{v_1},2\overrightarrow{v_2},2\overrightarrow{v_3})$

$=P\begin{pmatrix}1&&\\&2&\\&&2\end{pmatrix}$ 即$A=P^{-1}\operatorname{diag}(1,2,2)\,P$

从而$A^k=P\operatorname{diag}(1,2^k,2^k)\,P^{-1}$. 最后$P^{-1}=\begin{pmatrix}-1&0&1\\1&1&-1\\1&0&0\end{pmatrix}$,

则$A^k=\begin{pmatrix}0&0&1\\1&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}\operatorname{diag}(1,2^k,2^k)\begin{pmatrix}-1&0&1\\1&1&-1\\1&0&0\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}2^k&0&0\\2^k-1&2^k&1-2^k\\2^k-1&0&1\end{pmatrix}$

【13-3】未定矩阵的性质判定

已知如下矩阵$A \in M_4(\mathbb{R})$, 其中所有参数都是实数

已知A有一个特征值 2,

且对应的几何重数(即对应的特征子空间维数)为 3

求证A可对角化

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 & 3 \\ a & 0 & b & c \\ d & e & 0 & f \\ g & h & k & 4 \end{pmatrix}$$

证: 由条件得$\dim V^2 = 3, V^2 = \left\{\vec{v} \middle| (A - 2E)\vec{v} = \vec{0}\right\}$

由第二章命题 4.4, 特征值 2 的代数重数≥ 3

可设$\mathcal{X}_A(t) = (t-2)^3(t-\lambda)$

于是$\operatorname{tr} A = 2 + 2 + 2 + \lambda = 6 + \lambda$

但$\operatorname{tr} A = a_{11} + a_{22} + a_{33} + a_{44} = 6$

$\therefore \lambda = 0$, 于是 0 也是A的特征值

同理$\dim V^0 \leq 1$, 但特征子空间至少有 1 维, 则$\dim V^0 = 1$

因此$\dim V^0 + \dim V^2 = 4, \dim(V^0 + V^2) = 4 \Rightarrow \dim(V^0 \cap V^2) = 0$

$\therefore \mathbb{R}^4 = V^0 \oplus V^2 \Rightarrow A$可对角化 ■

注: 也可由$\operatorname{rank}(A - 2E) = 1$ 得$A - 2E = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 & 3 \\ 0 & -2 & -2 & -2 \\ 0 & -2 & -2 & -2 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

$A = A - 2E + 2E = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$, 由此出发证明亦可

【13-4】可对角化相似循环矩阵

设有下列复矩阵, 其中$a_0,\dots,a_{n-1}\in\mathbb{C}$

$$A=\begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-2} \\ a_{n-2} & a_{n-1} & a_0 & \cdots & a_{n-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_0 \end{pmatrix}$$

求证: 假设$B\in M_n(\mathbb{C})$在 $\mathbb{C}$ 上可对角化, 则存在$a_0,\dots,a_{n-1}\in\mathbb{C}$

使得B相似于如上的A

证: 回顾习题 $12-3$, A有n个线性无关的特征向量

$\overrightarrow{v_k}=(1,\varepsilon_k,\dots,\varepsilon_k^{n-1}), k=0,\dots,n-1, \varepsilon_k=e^{\frac{2\pi ki}{n}}$

则$\{\overrightarrow{v_k}\}$是一组基, 且由于$\overrightarrow{v_k}$都是特征向量

可知$A\sim_s \operatorname{diag}(f(\varepsilon_0),\dots,f(\varepsilon_{n-1}))$

由条件, $\exists P\in GL_n(\mathbb{C})$, 使得$PBP^{-1}=\operatorname{diag}(\lambda_1,\dots,\lambda_n)$

由插值多项式可知可取$n-1$ 次复多项式

$f(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_{n-1}x^{n-1}$

使得$f(\varepsilon_k)=\lambda_{k+1}, k=0,\dots,n-1$

于是$A\sim_s \operatorname{diag}\big(f(\varepsilon_0),\dots,f(\varepsilon_{n-1})\big)=\operatorname{diag}(\lambda_1,\dots,\lambda_n)\sim B$ ■

【13-5】**对角矩阵诱导矩阵映射可对角化**

设$A \in M_n(F)$是F上的一个可对角化矩阵,考虑线性变换

$\varphi_A: M_n(F) \to M_n(F), X \mapsto AX$

求证φ_A可对角化

证:先假设A就是对角矩阵,即$A = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$

令$e_{ij} = \left(\vec{0}, \dots, \vec{0}, \underbrace{\vec{e_i}}_{\text{第}j\text{列}}, \vec{0}, \dots, \vec{0}\right)$,即$e_{ij}$为第$i$行$j$列为 1,其余为 0 的矩阵

则有$\varphi_A(e_{ij}) = A(e_{ij}) = (\vec{0}, \dots, \vec{0}, A\vec{e_i}, \vec{0}, \dots, \vec{0})$

$= (\vec{0}, \dots, \vec{0}, \lambda_i\vec{e_i}, \vec{0}, \dots, \vec{0}) = \lambda_i(\vec{0}, \dots, \vec{0}, \vec{e_i}, \vec{0}, \dots, \vec{0}) = \lambda_i e_{ij}$

可知每个e_{ij}都是φ_A的特征向量,则φ_A有一组由特征向量组成的基

从而此时φ_A可对角化

一般情况下,由A可对角化,$\exists P \in GL_n(F)$使得

$A = PDP^{-1}. D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$

则$\varphi_A(X) = AX = PDP^{-1}X = \varphi_P \circ \varphi_D \circ \varphi_{P^{-1}}(x)$

由于$PP^{-1} = P^{-1}P = E$,可知$\varphi_P \circ \varphi_{P^{-1}}(X) = PP^{-1}X = X = Id(X)$

$\varphi_{P^{-1}} \circ \varphi_P(X) = P^{-1}PX = X = Id(X)$

于是φ_P是可逆线性算子,且$\varphi_{P^{-1}} = (\varphi_P)^{-1}$

取$v_{ij} = \varphi_P(e_{ij}) = Pe_{ij}$,由$\varphi_P$可逆知$\{v_{ij}\}$为$M_n(F)$的一组基

又$\varphi_A(v_{ij}) = PDP^{-1}(Pe_{ij}) = PDe_{ij} = P(\lambda_i e_{ij}) = \lambda_i Pe_{ij} = \lambda_i v_{ij}$

可知$\{v_{ij}\}$为特征向量,则φ_A可对角化 ■

【14-1】约当块的基本量

求$J_n(\lambda)$的极小多项式,特征多项式,特征子空间维数和$J_n(\lambda)^k(k\in\mathbb{N})$

解:记$J_n(\lambda)=J$

$$\mathcal{X}_J(t)=\det(tE-J)=\begin{vmatrix} t-\lambda & -1 & & & \\ & t-\lambda & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & t-\lambda & -1 \\ & & & & t-\lambda \end{vmatrix}=(t-\lambda)^n$$

由$C-H$定理,$\mathcal{X}_J$零化J,则$\mu_J\,\middle|\,\mathcal{X}_J$

于是可设$\mu_J(t)=(t-\lambda)^m,2\le m\le n$

$$设J_0=J-\lambda E=\begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ & 0 & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 0 & 1 \\ & & & & 0 \end{pmatrix}$$

$$且对任何矩阵A=(a_{ij}),AJ_0=\begin{pmatrix} 0 & a_{11} & \cdots & a_{n-1,1} \\ 0 & a_{12} & \cdots & a_{n-1,2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_{1n} & \cdots & a_{n-1,n} \end{pmatrix}$$

$$从而可知J_0^{n-1}=\begin{pmatrix} O_{n\times n-1} & \begin{matrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix} \end{pmatrix},J_0^n=0$$

$\Rightarrow (J-\lambda E)^m=0$ 时$n\ge m\ge n$,即$m=n$

且$\mu_J(t)=(t-\lambda)^n$

J的唯一特征值为λ,又$J-\lambda E=J_0,\operatorname{rank}J_0=n-1$

从而$\dim V^0=\dim\ker(J-\lambda E)=n-\operatorname{rank}J_0=1$

$\because J_0E=EJ_0\ \therefore J^m=(J_0+\lambda E)^m$可用二项式定理

$$J^m=\sum_{k=0}^{m}C_m^kJ_0^k\lambda^{m-k}E^{m-k}=\sum_{k=0}^{m}C_m^kJ_0^k\lambda^{m-k}$$

$$=\sum_{k=0}^{\min\{m,n-1\}}C_m^kJ_0^k\lambda^{m-k}$$

因此$J^m=\begin{pmatrix}\lambda^m & m\lambda^{m-1} & \cdots & C_m^{n-2}\lambda^{m-n+1} & C_m^{n-1}\lambda^{m-n}\\ 0 & \lambda^m & \cdots & C_m^{n-3}\lambda^{m-n+2} & C_m^{n-2}\lambda^{m-n+1}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & \lambda^m & m\lambda^{m-1}\\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda^m\end{pmatrix}$

当$n-1>m$时,规定$C_m^{n-1}=0$

【14-2】零不能为广义特征子空间

设V为n维向量空间且$n\geq 1$,

求证:任意V上的线性算子的广义特征子空间不可能是$\{\vec{0}\}$

证:假设存在一个i使得$V(p_i)=\ker\left(p_i^{r_i}(\mathcal{A})\right)=\{\vec{0}\}$

则$p_i^{r_i}(\mathcal{A}):V\to V$是单射,从而是满射,进而是可逆线性算子

由极小多项式定义可知

$O=\mu_A(A)=p_1^{r_1}(A)\cdots p_s^{r_s}(A)$

且由于上式右边各项都是A的多项式,从而两两可交换

则有$O=g(\mathcal{A})p_i^{r_i}(\mathcal{A}),g(t)=\mu_A(t)/p_i^{r_i}(t)$

由$p_i^{r_i}(\mathcal{A})$可逆,

则$O=O\left(p_i^{r_i}(\mathcal{A})\right)^{-1}=g(\mathcal{A})p_i^{r_i}(\mathcal{A})\left(p_i^{r_i}(\mathcal{A})\right)^{-1}=g(\mathcal{A})$

$\Rightarrow g$零化$A,\deg g<\deg\mu_A$,矛盾

同理,对$\forall i,V(p_i)\neq\{\vec{0}\}$

【14-3】N 次方为单位矩阵的条件

证明:对于矩阵$A\in M_n(\mathbb{C})$,关系式$A^N=E$成立

当且仅当A可对角化且它的特征值都是N次单位根

证:$\Leftarrow$:若A可对角化,则存在$P\in GL_n(\mathbb{C})$

使得$A=PDP^{-1},D=\operatorname{diag}(\lambda_1,\dots,\lambda_n)$

又$\mathcal{X}_A = \mathcal{X}_D$, 可知$\lambda_1, \dots, \lambda_n$也是$A$的特征值

因此$\lambda_i^N = 1, i = 1, \dots, n$

则$A^N = PD^N P^{-1} = PEP^{-1} = PP^{-1} = E$

$\Rightarrow$ 若$A^N = E$, 可知$t^N - 1$ 是A的一个零化多项式

从而$\mu_A \mid t^N - 1$

然而$\gcd(t^N - 1, (t^N - 1)') = \gcd(t^N - 1, Nt^{N-1}) = 1$

可知$t^N - 1$ 无重根, 从而μ_A无重根, 则A可对角化

设A的一个特征值为λ, 则$\exists \vec{v} \neq \vec{0}$, 使得$A\vec{v} = \lambda \vec{v}$

从而$\vec{v} = E\vec{v} = A^N \vec{v} = A^{n-1}(\lambda \vec{v}) = \lambda A^{N-1} \vec{v} = \cdots = \lambda^N \vec{v}$

由$\vec{v} \neq \vec{0}$得$\lambda^N = 1$, 即λ是N次单位根 ■

【14-4】交换乘积不改变特征多项式

证明: $\forall A, B \in M_n(\mathbb{R})$, AB和BA的特征多项式相同

证: 扰动法:

若A可逆, 则知$AB = A(BA)A^{-1}$ 使得$AB \sim_s BA$, 显然$\mathcal{X}_{AB} = \mathcal{X}_{BA}$

若A不可逆, 考虑$A_s = sE + A$, 于是$\det A_s = \mathcal{X}_{-A}(s)$

然而 $\mathcal{X}_{-A}$是一个t的多项式, 从而只有有限个零点, 且 0 也是一个零点

记$m = \min\{|\lambda| \mid \lambda \in \operatorname{spec}(-A) \setminus \{0\}\}$

则若 $0 < |s| < m \quad [*]$, 则有A_s可逆

于是有$\mathcal{X}_{A_s B} = \mathcal{X}_{BA_s}$

$\mathcal{X}_{A_s B}, \mathcal{X}_{BA_s}$的系数由$a_{ij}, b_{ij}, s$的四则运算给出

则当$s \to 0$ 时, $\mathcal{X}_{A_s B} \to \mathcal{X}_{AB}, \mathcal{X}_{BA_s} \to \mathcal{X}_{BA}$

$\mathcal{X}_{A_s B} = \mathcal{X}_{BA_s} \Rightarrow \mathcal{X}_{AB} = \mathcal{X}_{BA}$ ■

注意, 能取极限是因为 0 是[*]式的聚点

分块矩阵法

$\mathcal{X}_{AB}(0) = (-1)^n \det AB = (-1)^n \det BA = \mathcal{X}_{BA}(0)$

考虑$P = \begin{pmatrix} E & O \\ -A & E \end{pmatrix}, Q = \begin{pmatrix} \lambda E & B \\ \lambda A & \lambda E \end{pmatrix}, \lambda \neq 0$

$PQ = \begin{pmatrix} \lambda E & B \\ O & \lambda E - AB \end{pmatrix}, QP = \begin{pmatrix} \lambda E - BA & B \\ O & \lambda E \end{pmatrix}$

$\because \det PQ = \det P \det Q = \det QP$

$\therefore |\lambda E||\lambda E - AB| = |\lambda E - BA||\lambda E|$

$\therefore \mathcal{X}_{AB}(\lambda) = |\lambda E - AB| = |\lambda E - BA| = \mathcal{X}_{BA}(\lambda)$

$\therefore$ 结合$\mathcal{X}_{AB}(0) = \mathcal{X}_{BA}(0)$可得

$\forall t \in \mathbb{R}\ \mathcal{X}_{AB}(t) = \mathcal{X}_{BA}(t)$ ■

【15-1】矩阵空间线性算子的基本量

设$A \in M_n(F)$, 求矩阵空间$M_n(F)$上的线性算子

$\varphi_A(X) = AX$的极小多项式和特征多项式(X为任一n阶矩阵)

解: 由于需要计算特征多项式, 因此寻找一组基写下φ_A的矩阵

令$A = (\overrightarrow{\alpha_1}, \dots, \overrightarrow{\alpha_n}) = (\alpha_{ij}), e_{ij} = \left(\vec{0}, \dots, \vec{0}, \underbrace{\vec{e_j}}_{\text{第}i\text{个}}, \vec{0}, \dots, \vec{0}\right)$

$$\text{则}\overrightarrow{\alpha_i} = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{ki} \overrightarrow{e_k}, \qquad A\overrightarrow{e_j} = (\overrightarrow{\alpha_1}, \dots, \overrightarrow{\alpha_n})\overrightarrow{e_j} = \overrightarrow{\alpha_j}$$

$$\varphi_A(e_{ij}) = \left(A\vec{0}, \dots, A\vec{0}, \underbrace{A\overrightarrow{e_j}}_{i}, A\vec{0}, \dots, A\vec{0}\right) = \left(\vec{0}, \dots, \vec{0}, \underbrace{\overrightarrow{\alpha_j}}_{i}, \vec{0}, \dots, \vec{0}\right)$$

$$= \left(\vec{0}, \dots, \vec{0}, \sum_{k=1}^{n} \alpha_{kj} \overrightarrow{e_k}, \vec{0}, \dots, \vec{0}\right) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{kj} \left(\vec{0}, \dots, \vec{0}, \overrightarrow{e_k}, \vec{0}, \dots, \vec{0}\right)$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \alpha_{kj} e_{ik}$$

即知对固定的$i, V_i=\langle e_{i1}, e_{i2}, \dots, e_{in}\rangle \subseteq M_n(F)$为$\varphi_A$的不变子空间

于是φ_A在基$B=\left\{\underbrace{e_{11}, \dots, e_{1n}}_{V_1}, \underbrace{e_{21}, \dots, e_{2n}}_{V_2}, \underbrace{e_{n1}, \dots, e_{nn}}_{V_n}\right\}$

下的矩阵为分块对角的,

考察$V_1, \varphi_A(e_{11}, \dots, e_{1n})=(e_{11}, \dots, e_{1n})\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \cdots & \alpha_{nn} \end{pmatrix}$

$=(e_{11}, \dots, e_{1n})A$

于是类似可得φ_A在基B下的矩阵为 $\operatorname{diag}(A, A, \dots, A)_n$

因此极小多项式$\mu_{\varphi_A}(t)=\operatorname{lcm}\big(\mu_A(t), \dots, \mu_A(t)\big)=\mu_A(t)$

特征多项式 $\mathcal{X}_{\varphi_A}(t)=\det(tE-\operatorname{diag}(A, A, \dots, A)_n)$

$=(\det(tE-A))^n=\big(\mathcal{X}_A(t)\big)^n$ ■

【15-2】Jn1 幂相似

证明: 对于复矩阵$J_n(1)$, 对任意正整数$k, J_n(1)$相似于$J_n(1)^k$

证: 证法 1

引理 当$n \geq 2$ 时, 设$A=\big(a_{ij}\big)$, 当$i \geq j$时$a_{ij}=0$, 即A严格上三角

$$A=\begin{pmatrix} 0 & a_{12} & * & * & * \\ & 0 & a_{23} & * & * \\ & & 0 & \ddots & * \\ & & & \ddots & a_{n-1,n} \\ & & & & 0 \end{pmatrix}$$

若$a_{12}a_{23}\cdots a_{n-1,n} \neq 0$, 则$A\sim_s J_n(0)$

引理的证明 考虑$A^{n-1}\overrightarrow{e_n}, \dots, A\overrightarrow{e_n}, \overrightarrow{e_n}$ [$T\overrightarrow{e_n}$即取矩阵T的最后一列]

经计算, $(A^{n-1}\overrightarrow{e_n},\dots,A\overrightarrow{e_n},\overrightarrow{e_n})=\begin{pmatrix} d_1 & * & \cdots & * & 0 \\ & d_2 & \cdots & * & 0 \\ & & \ddots & * & \vdots \\ & & & d_{n-1} & 0 \\ & & & & 1 \end{pmatrix}$

其中$d_i=a_{i,i+1}a_{i+1,i+2}\cdots a_{n-1,n}, i=1,\dots,n-1$

则由$d_1=a_{12}\cdots a_{n-1}a_n\neq 0$ 知$d_i\neq 0, i=1,\dots,n-1$

则知$\left\{\overrightarrow{v_\iota}=A^{n-i}\overrightarrow{e_n}\middle|i=1,\dots,n\right\}$为$\mathbb{C}^n$的一组基

由此, $A\overrightarrow{v_\iota}=\overrightarrow{v_{\iota-1}}$, 故在此基下线性算子$\vec{x}\mapsto A\vec{x}$的矩阵为$J_n(0)$

于是$A\sim_s J_n(0)$ ■

于是$\forall k\in\mathbb{Z}>0, J_n(1)^k=\left(E+J_n(0)\right)^k=E+kJ_n(0)+$其他

则知$J_n(1)^k-E$满足引理的条件, 则$J_n(1)^k-E\sim_s J_n(0)$

$\therefore J_n(1)^k\sim_s J_n(0)+E=J_n(1)$ ■

证法 2(丘维声): $J_n(1)^k$是主对角元都为 1 的上三角矩阵

因此$J_n(1)^k$的特征多项式$\mathcal{X}_{J_n(1)^k}=(\lambda-1)^n$

从而$J_n(1)^k$有$Jordan$标准型, 设为J

J的主对角元为 1 的$Jordan$块的总数为$n-\operatorname{rank}(J_n(1)^k-E)$

$[\sum N_i=\sum(r_{i-1}+r_{i+1}-2r_i)=r_0-r_1]$

由于$J_n(1)=E+J_n(0)$, 因此

$J_n(1)^k=\left(E+J_n(0)\right)^k=E+C_k^1J_n(0)+\cdots+C_k^kJ_n(0)^k$

$$J_n(1)^k-E=\begin{pmatrix} 0 & k & C_k^2 & C_k^3 & \cdots & C_k^k & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & k & C_k^2 & \cdots & C_k^{k-1} & C_k^k & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & k \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

从而$\operatorname{rank}(J_n(1)^k-E)=n-1$, 因此$n-\operatorname{rank}(J_n(1)^k-E)=1$

于是$J_n(1)^k$的标准型$J=J_n(1)$, 即$J_n(1)^k\sim_s J_n(1)$ ■

【15-3】可交换则可同时对角化

$\mathcal{A},\mathcal{B}:V\to V,\dim V=n<+\infty$

若$\mathcal{A},\mathcal{B}$ 都可对角化, 且$\mathcal{A}\mathcal{B}=\mathcal{B}\mathcal{A}$

则存在一组基$\{\overrightarrow{v_k}\}$, 使得 $\mathcal{A},\mathcal{B}$ 在这组基下同时对角化

即$\overrightarrow{v_1},\dots\overrightarrow{v_n}$都是$\mathcal{A},\mathcal{B}$ 的特征向量

证: $\because$ $\mathcal{A}$可对角化, $\therefore$ $\exists$特征子空间分解

$V=V^{\lambda_1}\oplus\cdots\oplus V^{\lambda_s},\lambda_i\in\operatorname{spec}\mathcal{A}\,,V^{\lambda_i}=\ker(\mathcal{A}-\lambda_i\mathcal{E})$

$\mathcal{A}\mathcal{B}=\mathcal{B}\mathcal{A}\Rightarrow$ 每个 V^{λ_i}都是 $\mathcal{B}$ 的不变子空间

即有 $\mathcal{B}\big|_{V^{\lambda_i}}:V^{\lambda_i}\to V^{\lambda_i}$

断言 若 $\mathcal{B}$ 可对角化, 则对任何 $\mathcal{B}$ 不变子空间$W,\mathcal{B}\big|_W$可对角化

断言的证明见后

因此存在V^{λ_i}的一组基$\{\overrightarrow{v_{\iota J}}\}$, 使得$\overrightarrow{v_{\iota J}}$是 $\mathcal{B}$ 的特征向量

自然$\overrightarrow{v_{\iota J}}$也是$\mathcal{A}$的特征向量

令$\{\overrightarrow{v_k}\}=\bigcup_{i=1}^{s}\{\overrightarrow{v_{\iota J}}\}$

则由直和$V=V^{\lambda_1}\oplus\cdots\oplus V^{\lambda_s}\Rightarrow\{v_k\}$为$V$的基 ■

断言 $\mathcal{B}$ 可对角化,则对任何 $\mathcal{B}$ 不变子空间$W,\mathcal{B}\big|_W$可对角化

证:取 $\mathcal{B}$ 的特征子空间分解

$V=V^{\mu_1}\oplus\cdots\oplus V^{\mu_t},\mu_i\in\operatorname{spec}\mathcal{B},V^{\mu_i}=\ker(\mathcal{B}-\mu_i\mathcal{E})$

$W\subset V$是 $\mathcal{B}$ 不变子空间

令$W_i=W\cap V^{\mu_i}=\ker\left(\mathcal{B}\big|_W-\mu_i\mathcal{E}\right)=W\cap\ker(\mathcal{B}-\mu_i\mathcal{E})$

由第二章定理 5.1 只需证$W=\bigoplus\limits_{i=1}^{t}W_i$

$W_1+\cdots+W_t\subseteq W,W_i\subseteq V^{\mu_i}$

则$\vec{w}=\overrightarrow{w_1}+\cdots+\overrightarrow{w_t}\in W_1+\cdots+W_t\subseteq V^{\mu_1}\oplus\cdots\oplus V^{\mu_t}$

则由$V^{\mu_1}\oplus\cdots\oplus V^{\mu_t}$可知$\vec{w}=\overrightarrow{w_1}+\cdots+\overrightarrow{w_t}$的分解唯一

$\Rightarrow W_1\oplus\cdots\oplus W_t\subseteq W$

取 $\vec{w}\in W\subseteq V=V^{\mu_1}\oplus\cdots\oplus V^{\mu_t}$

则 $\vec{w}=\overrightarrow{v_1}+\cdots+\overrightarrow{v_t},\overrightarrow{v_i}\in V^{\mu_i}$

$\mathcal{B}\vec{w}=\mu_1\overrightarrow{v_1}+\cdots+\mu_t\overrightarrow{v_t}$

…

$\mathcal{B}^{t-1}\vec{w}=\mu_1^{t-1}\overrightarrow{v_1}+\cdots+\mu_t^{t-1}\overrightarrow{v_t}$

$$\Rightarrow(\vec{w},\mathcal{B}\vec{w},\dots,\mathcal{B}^{t-1}\vec{w})=(\overrightarrow{v_1},\dots,\overrightarrow{v_t})\begin{pmatrix}1&\mu_1&\cdots&\mu_1^{t-1}\\1&\mu_2&\cdots&\mu_2^{t-1}\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\1&\mu_t&\cdots&\mu_t^{t-1}\end{pmatrix}$$

$\mu_1,\dots,\mu_t$两两不同$\Rightarrow\overrightarrow{v_1},\dots,\overrightarrow{v_t}$都是$\vec{w},\mathcal{B}\vec{w},\dots,\mathcal{B}^{t-1}\vec{w}$ 的线性组合

$\Rightarrow\overrightarrow{v_i}\in W\Rightarrow\overrightarrow{v_i}\in W\cap V^{\mu_i}=W_i\Rightarrow\vec{w}\in\bigoplus\limits_{i=1}^{t}W_i$

$\Rightarrow W\subseteq\bigoplus\limits_{i=1}^{t}W_i\subseteq W\Rightarrow W=\bigoplus\limits_{i=1}^{t}W_i$

【15-4】循环空间分解不变子空间也循环

设V是域F上的n维线性空间,$\mathcal{A}$为V上的线性算子

证明:若V的某个循环子空间可以分解为两个$\mathcal{A}-$子空间的直和

则这两个$\mathcal{A}-$子空间也是循环子空间

证:不妨设V本身就是循环的

$\left[\text{对}W\subseteq V\text{循环,只需要考虑}\mathcal{A}\big|_W:W\to W\text{即可}\right]$

取循环向量$\vec{v}$,使得$V=F[\mathcal{A}]\cdot\vec{v}=\langle\vec{v},\mathcal{A}\vec{v},\dots,\mathcal{A}^{n-1}\vec{v}\rangle$

若有$V_1,V_2\subseteq V$为$\mathcal{A}$不变子空间,使得$V=V_1\oplus V_2$

取$\vec{v}\in V=V_1\oplus V_2$,则$\exists!\overrightarrow{v_1}\in V_1,\overrightarrow{v_2}\in V_2$,使得$\vec{v}=\overrightarrow{v_1}+\overrightarrow{v_2}$

断言 $V_1=F[\mathcal{A}]\cdot\overrightarrow{v_1}$

断言的证明:由于V_i是$\mathcal{A}$不变子空间,则可知$\forall f(t)\in F[t]$

$f(\mathcal{A})\overrightarrow{v_1}\in V_1$　于是$F[\mathcal{A}]\cdot\overrightarrow{v_1}\subseteq V_1$

$\forall\overrightarrow{w_i}\in V_1\subseteq V$,由$V=F[\mathcal{A}]\cdot\vec{v}$可知$\exists g(t)\in F[t]$

使得$\overrightarrow{w_1}=g(\mathcal{A})\vec{v}=g(\mathcal{A})(\overrightarrow{v_1}+\overrightarrow{v_2})=g(\mathcal{A})\overrightarrow{v_1}+g(\mathcal{A})\overrightarrow{v_2}$

显然有$g(\mathcal{A})\overrightarrow{v_1}\in V_1$

但由$\vec{v}$的分解唯一性可得出$\overrightarrow{w_1}$的分解唯一性

因此$\overrightarrow{w_1}=g(\mathcal{A})\overrightarrow{v_1},g(\mathcal{A})\overrightarrow{v_2}=\vec{0}$

于是$\overrightarrow{w_1}\in F[\mathcal{A}]\cdot\overrightarrow{v_1}\Rightarrow V_1\subseteq F[\mathcal{A}]\cdot\overrightarrow{v_1}$

因此$V_1=F[\mathcal{A}]\cdot\overrightarrow{v_1}$是循环子空间,$V_2$同理　■

【15-5】Jordan-cherally 分解

V是有限维复线性空间,$\mathcal{A}: V \to V$线性算子

则存在唯一的线性算子$\mathcal{N}, \mathcal{S}: V \to V, s.t.$

$(i)\mathcal{A} = \mathcal{N} + \mathcal{S}$,$\mathcal{N}$幂零,$\mathcal{S}$可对角化

$(ii)\mathcal{N}, \mathcal{S}$都是$\mathcal{A}$的复多项式, 特别地$\mathcal{N}\mathcal{S} = \mathcal{S}\mathcal{N}$

证: 想法:

$\mathcal{A} \sim_s \operatorname{diag}\left(J_{n_1}(\lambda_1), \dots, J_{n_k}(\lambda_k)\right)$, 可取$\mathcal{N}, \mathcal{S}$使其矩阵分别为

$\operatorname{diag}\left(J_{n_1}(0), \dots, J_{n_k}(0)\right)$, $\operatorname{diag}(\lambda_{n_1} E_{n_1}, \dots, \lambda_{n_k} E_{n_k})$

唯一性: 设$(\mathcal{N}, \mathcal{S}), (\widetilde{\mathcal{N}}, \tilde{\mathcal{S}})$为两组线性算子, 满足(1)(2)

即$\mathcal{A} = \mathcal{N} + \mathcal{S} = \widetilde{\mathcal{N}} + \tilde{\mathcal{S}}, \mathcal{N}, \widetilde{\mathcal{N}}$幂零,$\mathcal{S}, \tilde{\mathcal{S}}$可对角化

且$\mathcal{N}\mathcal{S} = \mathcal{S}\mathcal{N}; \widetilde{\mathcal{N}}\tilde{\mathcal{S}} = \tilde{\mathcal{S}}\widetilde{\mathcal{N}}$, $\mathcal{N}, \mathcal{S}, \widetilde{\mathcal{N}}, \tilde{\mathcal{S}}$都是$\mathcal{A}$的复多项式

(a)设$\mathcal{N}^{r_1} = \mathcal{O}, \widetilde{\mathcal{N}}^{r_2} = \mathcal{O}$

$$\left(\mathcal{N} - \widetilde{\mathcal{N}}\right)^{r_1 + r_2} = \sum_{k=1}^{r_1 + r_2} C_{r_1 + r_2}^{k} \mathcal{N}^k \widetilde{\mathcal{N}}^{r_1 + r_2 - k} (-1)^{r_1 + r_2 - k}$$

$$= \sum_{k=1}^{r_1} \underbrace{\widetilde{\mathcal{N}}^{r_2}}_{\mathcal{O}} C_{r_1 + r_2}^{k} \mathcal{N}^k \widetilde{\mathcal{N}}^{r_1 - k} (-1)^{r_1 + r_2 - k}$$

$$+ \sum_{k=1}^{r_2} \underbrace{\mathcal{N}^{r_1}}_{\mathcal{O}} C_{r_1 + r_2}^{k + r_1} \mathcal{N}^k \widetilde{\mathcal{N}}^{r_2 - k} (-1)^{r_2 - k}$$

$= \mathcal{O} + \mathcal{O} = \mathcal{O}$

$\Rightarrow \mathcal{N} - \widetilde{\mathcal{N}}$也幂零

$(b) \because \mathcal{S}, \tilde{\mathcal{S}}$都是$\mathcal{A}$的多项式 $\therefore \mathcal{S}\tilde{\mathcal{S}} = \tilde{\mathcal{S}}\mathcal{S}$

由习题 $15 - 3$, 存在一组基$\{\overrightarrow{v_i}\}$使得每个$\overrightarrow{v_i}$都是$\mathcal{S}$和$\tilde{\mathcal{S}}$的公共特征向量

设在该基下$\mathcal{S}$和$\tilde{\mathcal{S}}$的矩阵分别为$\operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, $\operatorname{diag}(\widetilde{\lambda_1}, \dots, \widetilde{\lambda_n})$

由$\mathcal{N} - \widetilde{\mathcal{N}} = \tilde{\mathcal{S}} - \mathcal{S}$得$\operatorname{diag}\left(\left(\lambda_1 - \widetilde{\lambda_1}\right)^{r_1 + r_2}, \dots, \left(\lambda_n - \widetilde{\lambda_n}\right)^{r_1 + r_2}\right) = O$

$\therefore \lambda_i = \widetilde{\lambda_i}, i = 1,2, \dots, n$

从而$\mathcal{S} = \tilde{\mathcal{S}}$, 且$\mathcal{N} - \widetilde{\mathcal{N}} = \tilde{\mathcal{S}} - \mathcal{S} = \mathcal{O} \Rightarrow \mathcal{N} = \widetilde{\mathcal{N}}$

存在性: 令$\mu_{\mathcal{A}}(t) = (t - \lambda_1)^{m_1} \cdots (t - \lambda_k)^{m_k}$为不可约分解

$\Rightarrow$ 广义特征子空间分解$V = V(t - \lambda_1) \oplus \cdots \oplus V(t - \lambda_k)$

$V(t - \lambda_i) = \ker((\mathcal{A} - t\mathcal{E})^{m_i})$

令 $p_i(t) = \mu_{\mathcal{A}}(t)/(t - \lambda_i)^{m_i} \Rightarrow \gcd(p_1, \dots, p_k) = 1$

$\exists u_1, \dots, u_k \in \mathbb{C}[t], s.t. u_1 p_1 + \cdots + u_k p_k = 1 \quad [*]$

令$P_i(\mathcal{A}) = u_i(\mathcal{A}) p_i(\mathcal{A}): V \to V$

断言$(a) P_1 + \cdots + P_k = \mathcal{E}$

$(b) \operatorname{im} P_i = \operatorname{im} u_i(\mathcal{A}) p_i(\mathcal{A}) = V(t - \lambda_i) = \ker(\mathcal{A} - \lambda_i \mathcal{E})^{m_i}$

$(c) P_i P_j = P_j P_i = \delta_{ij} P_i$

断言的证明: (a)由$[*]$, 有$P_1 + \cdots + P_k = \mathcal{E}$

(b)若$\vec{v} \in \ker(\mathcal{A} - \lambda_i \mathcal{E})^{m_i}$

由(a), $\vec{v} = P_1 \vec{v} + \cdots + P_k \vec{v}$

对$j \neq i, p_j$中含因子$(t - \lambda_i)^{m_i}$

则$P_j \vec{v} = u_j(\mathcal{A}) p_j(\mathcal{A}) \vec{v} = \vec{0} \Rightarrow \vec{v} = P_i \vec{v} \in \operatorname{im} P_i$

若$\vec{v} \in \operatorname{im} P_i = \operatorname{im} u_i(\mathcal{A}) p_i(\mathcal{A})$

$\exists \vec{w}, s.t.\ \vec{v} = u_i(\mathcal{A}) p_i(\mathcal{A}) \vec{w}$

$(\mathcal{A} - \lambda_i \mathcal{E})^{m_i} \vec{v} = \mu_i(\mathcal{A})(\mathcal{A} - \lambda_i \mathcal{E})^{m_i} p_i(\mathcal{A}) \vec{w}$

$= \mu_i(\mathcal{A}) \mu_{\mathcal{A}}(\mathcal{A}) \vec{v} = \vec{0}$

则$\vec{v} \in V(t - \lambda_i)$

$\therefore \operatorname{im} P_i = V(t - \lambda_i)$

(c)因为P_i均为$\mathcal{A}$的多项式,可交换性是显然的

由(a),$\forall \vec{v}, \vec{v} = P_1\vec{v} + \cdots + P_k\vec{v}$

$= \vec{0} + \cdots + \vec{0} + P_i\,\vec{v} + \vec{0} + \cdots + \vec{0} \in V(t-\lambda_1) \oplus \cdots \oplus V(t-\lambda_k)$

$P_i\vec{v} = P_iP_1\vec{v} + \cdots + P_iP_k\vec{v} \qquad [\in \operatorname{im} P_i]$

$= P_1P_i\vec{v} + \cdots + P_kP_i\vec{v} \in V(t-\lambda_1) \oplus \cdots \oplus V(t-\lambda_k)$

于是由直和有$P_jP_i\vec{v} = \delta_{ji}P_i\vec{v} \Rightarrow P_jP_i = \delta_{ji}P_i$

综合上述三条可知,$P_1, \ldots, P_k$实际上给出了

广义特征子空间分解的直和投影算子

令$\mathcal{S} = \lambda_1P_1 + \cdots + \lambda_sP_s, \mathcal{N} = \mathcal{A} - \mathcal{S}$

则$\mathcal{S} = (\lambda_1u_1p_1 + \cdots + \lambda_su_sp_s)(\mathcal{A})$是$\mathcal{A}$的多项式

$\mathcal{N} = \mathcal{A} - \mathcal{S} \Rightarrow \mathcal{N}$是$\mathcal{A}$的多项式

由$(b),(c) \Rightarrow P_i\big|_{\operatorname{im} P_i} = \mathcal{E}_{\operatorname{im} P_i}, P_j\big|_{\operatorname{im} P_i} = \mathcal{O}, j \neq i$

则$\lambda_iP_i\big|_{\operatorname{im} P_i} = \lambda_i\mathcal{E}_{\operatorname{im} P_i}$

则知$\mathcal{S}\big|_{\operatorname{im} P_i} = \lambda_i\mathcal{E}_{\operatorname{im} P_i}$

$\mathcal{S}$的矩阵$= \operatorname{diag}\left(\lambda_{n_1}E_{n_1}, \ldots, \lambda_{n_k}E_{n_k}\right)$,显然可对角化

取$r = \max\{m_i\}$,注意$\mathcal{N}$为$\mathcal{A}$的多项式,每个$V(t-\lambda_i)$都是$\mathcal{N}-$子空间

则$\mathcal{N}^r\big|_{V(t-\lambda_i)} = \left(\mathcal{N}\big|_{V(t-\lambda_i)}\right)^r = \left(\mathcal{A} - \mathcal{S}\big|_{V(t-\lambda_i)}\right)^r$

$= \left(\mathcal{A}\big|_{V(t-\lambda_i)} - \lambda_i\mathcal{E}_{\operatorname{im} P_i}\right)^r$

然而由广义特征子空间分解,$\mathcal{A}\big|_{V(t-\lambda_i)}$的极小多项式为$(t-\lambda_i)^{m_i}$

$\therefore \left(\mathcal{A}\big|_{V(t-\lambda_i)} - \lambda_i\mathcal{E}_{\operatorname{im} P_i}\right)^r = 0, \forall i = 1, \ldots, k$

则$\mathcal{N}^r = 0$,即$\mathcal{N}$幂零 $\blacksquare$

【15-6】中国剩余定理

设给定的$p_1,\dots,p_k\in F[t]$两两互素,$\deg p_i\geq 1$

则$\forall f_1,\dots,f_k\in F[t],\exists f,q_1,\dots,q_k\in F[t]$

使得$f=q_ip_i+f_i$对$i=1,\dots,k$成立

即同余方程组$f\equiv f_i\ mod\ p_i$总有解f

证:令$M=p_1,\dots,p_k,M_i=M/p_i$

则$\gcd(M_1,\dots,M_k)=1$,从而存在$u_1,\dots,u_k\in F[t]$

使得$u_1M_1+\cdots+u_kM_k=1$

令$f=f_1u_1M_1+\cdots+f_ku_kM_k+hM,\qquad h\in F[t]$

对$1\leq i\leq k$,不妨只考虑$i=1$

则$f=f_1(1-u_2M_2-\cdots-u_kM_k)+f_2u_2M_2+\cdots+f_ku_kM_k+hM$

$=f_1+(f_2-f_1)u_2M_2+\cdots+(f_k-f_1)u_kM_k+hM$

由M,M_i的构造,$p_1\big|M_2,\dots,p_1\big|M_k,p_1\big|M$

则可取$q_1=(f-f_1)/p_1\in F[t]$

于是$f=p_1q_1+f_1$成立 ■

注:具体应用中$p_i=(t-\lambda_i)^{m_i},M=\mu_{\mathcal{A}},f_i=\lambda_i$

注:本定理证明中实际上只用到了$Bezout$等式和互素的概念

所以它可以在相当一般的环境中陈述,如任意交换环

【16-1】各种空间分解总结

设V为有限维线性空间,$\mathcal{A}: V \to V$为线性算子

$\mu_{\mathcal{A}} = p_1^{m_1} \cdots p_s^{m_s}, \qquad \mathcal{X}_{\mathcal{A}} = p_1^{n_1} \cdots p_s^{n_s}$

$a1.$先对V作广义特征子空间分解,得到$V = V(p_1) \oplus \cdots \oplus V(p_s)$

$a2.$对每个$V(p_i)$作不可分子空间分解或循环子空间分解

$b1.$先对V作循环子空间分解,得到$V = F[\mathcal{A}] \cdot \overrightarrow{v_1} \oplus \cdots \oplus F[\mathcal{A}] \cdot \overrightarrow{v_t}$

$b2.$对每个$F[\mathcal{A}] \cdot \overrightarrow{v_\iota}$作不可分子空间分解或广义特征子空间分解

$c.$对V直接作不可分子空间分解

唯一性定理(见后)保证以上三个路径的结果一致,即

$V = V_0 \oplus \cdots \oplus V_l$

$$= \bigoplus_{i=1}^{s} \left(F[\mathcal{A}] \cdot \overrightarrow{v_{\iota 1}} \oplus \cdots \oplus F[\mathcal{A}] \cdot \overrightarrow{v_{\iota k_\iota}}\right) = \bigoplus_{j=1}^{t} \left(V_{j1} \oplus \cdots \oplus V_{jk'_j}\right)$$

且$\{V_0, \dots, V_l\} = \{F[\mathcal{A}] \cdot \overrightarrow{v_{\iota b}}\} = \{V_{ja}\}$

取每个不变子空间的基,拼成V的基,此时$\mathcal{A}$的矩阵记为A,则

A可表为$\operatorname{diag}(A_1, \dots, A_s)$, $\operatorname{diag}(A'_1, \dots, A'_t)$

A_i可进一步表为$\operatorname{diag}(A_{i1}, \dots, A_{ik_i})$, $k_1 + \cdots k_s = l$

A'_i可进一步表为$\operatorname{diag}\left(A'_{j1}, \dots, A_{jk'_j}\right)$, $k'_1 + \cdots + k'_t = l$

唯一性定理:可以取到合适的基

使得以上各个情况都互相以分块对角的$P \in GL_n(F)$相似

$\mathcal{X}_{\mathcal{A}}$和$\mu_{\mathcal{A}}$

$\mu_{\mathcal{A}_i} = \mu_{\mathcal{A}}|_{V(p_i)} = p_i^{m_i}, \mu_{\mathcal{A}_{ia}} = \mu_{\mathcal{A}}|_{F[\mathcal{A}] \cdot \overrightarrow{v_{\iota a}}} = p_i^{m_{ia}}, 1 \le m_{ia} \le m_i$

称所有这些$\{\mu_{\mathcal{A}_{ia}} = p_i^{m_{ia}}\}$作为重集,为$A$的初等因子组

直接计算可得$\mathcal{X}_{\mathcal{A}}=\prod_{i=1}^{s}\prod_{a=1}^{k_i}p_i^{m_{ia}}$,即$\mathcal{X}_{\mathcal{A}}=$所有初等因子的乘积

$$\sum_{i=1}^{s}\sum_{a=1}^{k_i}m_{ia}=\sum_{i=1}^{s}n_i=n$$

唯一性的精确叙述:A的初等因子只由A决定,和分解本身无关

且因子p_i^t出现的个数由公式$N(i,t)=\dfrac{1}{d_i}\left(r_{i,t-1}+r_{i,t+1}-2r_{i,t}\right)$

特别是当$F=\mathbb{C}$时,$p_i(t)=t-\lambda_i$

此时A_{ia}的最优可能性为$J_{n_{ia}}(\lambda_i)$

于是分解定理的唯一存在性$\Rightarrow Jordan$标准型

若$F=\mathbb{C}$,则$\forall\mathcal{A}:V\to V$,存在$V$的一组基使得$\mathcal{A}$的矩阵为$Jordan$型$J_A$

或矩阵形式:$\forall A\in M_n(\mathbb{C}),\exists P\in GL_n(\mathbb{C})$使得$PAP^{-1}=J_A$

且J_A只取决于A

【16-2】复 Jordan 标准型的计算方法

(i)计算特征多项式或极小多项式的不可约因子分解

$$\mu_{\mathcal{A}}=p_1^{m_1}\cdots p_s^{m_s},\qquad \mathcal{X}_{\mathcal{A}}=p_1^{n_1}\cdots p_s^{n_s},\qquad p_i=(t-\lambda_i)$$

(ii)对每个$\lambda_i\in\operatorname{spec}A$,计算$r_{i,t}=\operatorname{rank}((A-\lambda_iE)^t)$,$t=1,2,\dots,n+1$

计算$N(\lambda_i,t)=r_{i,t-1}+r_{i,t+1}-2r_{i,t}$

(iii)写下$Jordan$标准型

$$J_A=\operatorname{diag}\left(\underbrace{J_1(\lambda_1)}_{N(\lambda_1,1)个},\dots,\underbrace{J_{t_1}(\lambda_1)}_{N(\lambda_1,t_1)个},\underbrace{J_1(\lambda_2)}_{N(\lambda_2,1)个},\dots\right)$$

【16-3】由秩还原 Jordan 标准型

已知$\mathcal{X}_A(t)=(t-3)^4(t+2)$

当 $\operatorname{rank}(A-3E)$ 分别为 1,2,3,4 时, 求出J_A

解: 由$t+2$ 的代数重数为 1 可知, 对应特征值-2

只有一个$Jordan$块$J_1(-2)=(-2)$

设$J_A=\operatorname{diag}\left(J_{n_1}(3),\ldots,J_{n_k}(3),-2\right)$, $n_1\geq\cdots\geq n_k\geq 1, n_1+\cdots+n_k=4$

则$J_A-3E=\operatorname{diag}\left(J_{n_1(0)},\ldots,J_{n_k}(0),-5\right)$

而 $\operatorname{rank}(A-3E)=\operatorname{rank}(J_A-3E)=n_1-1+\cdots+n_k-1+1$

$=n_1+\cdots+n_k-k+1=5-k$

因此$\begin{cases} n_1+\cdots+n_k=4 \\ n_1\geq\cdots\geq n_k\geq 1 \\ 5-k=\operatorname{rank}(A-3E) \end{cases}$

当 $\operatorname{rank}(A-3E)=1$ 时, $k=4$

则$n_1=n_2=n_3=n_4=1, J_A=\operatorname{diag}(3,3,3,3,-2)$

当 $\operatorname{rank}(A-3E)=2$ 时, $k=3$

则$n_1=2, n_2=n_3=1, J_A=\operatorname{diag}(J_2(3),3,3,-2)$

当 $\operatorname{rank}(A-3E)=3$ 时, $k=2$

$n_1=3, n_2=1$ 或$n_1=n_2=2$,

$J_A=\operatorname{diag}(J_3(3),3,-2)$ 或 $\operatorname{diag}(J_2(3),J_2(3),-2)$

当 $\operatorname{rank}(A-3E)=4$ 时, $k=1$

$n_1=4, J_A=\operatorname{diag}(J_4(3),-2)$

【16-4】幂零的判定条件 谱映射定理

设A是 $\mathbb{C}$ 上$n \times n$矩阵

证明: $\operatorname{tr} A^k = 0$ 对 $1 \leq k \leq n$成立 $\Leftrightarrow$ A幂零

证: 引理 谱映射定理

对$f \in \mathbb{C}[t], A \in M_n(\mathbb{C})$

$$\operatorname{spec} f(A) \overset{\text{作为重集}}{=} f(\operatorname{spec} A) \coloneqq \{f(\lambda) | \lambda \in \operatorname{spec} A\}$$

引理的证明: $\exists P \in GL_n(\mathbb{C})$,使得$J_A = PAP^{-1}$

则 $\operatorname{spec} A = \operatorname{spec} J_A$, $\operatorname{spec} f(A) = \operatorname{spec} f(J_A)$

又J_A的为上三角矩阵,主对角元为$\lambda_1, \dots, \lambda_n$

则$f(J_A)$的主对角元为$f(\lambda_1), \dots, f(\lambda_n)$

从而 $\operatorname{spec} f(A) = \operatorname{spec} f(J_A) = f(\operatorname{spec} J_A) = f(\operatorname{spec} A)$ ■

$\Rightarrow$: A幂零 $\Rightarrow \mu_A(t) = t^m$, 于是 $\operatorname{spec} A = \{0,0,\dots,0\}$

$\Rightarrow \operatorname{spec} A^k = \{0,\dots,0\}, k = 1,\dots,n$

于是 $\operatorname{tr} A^k = 0 + 0 + \cdots + 0 = 0, k = 1,\dots,n$

$\Leftarrow$: 设 $\operatorname{spec} A = \left\{ \underbrace{\lambda_1}_{m_1\text{个}}, \underbrace{\lambda_2}_{m_2\text{个}}, \dots, \underbrace{\lambda_s}_{m_s\text{个}} \right\}$作为一个重集

且$\lambda_1, \dots, \lambda_s$两两不同

于是由谱映射定理, $\operatorname{spec} A^k = \left\{ \underbrace{\lambda_1^k}_{m_1\text{个}}, \underbrace{\lambda_2^k}_{m_2\text{个}}, \dots, \underbrace{\lambda_s^k}_{m_s\text{个}} \right\}, k = 1,\dots,n$

从而 $\operatorname{tr} A^k = 0, k = 1, \dots, n \Rightarrow$

$$\begin{cases} m_1\lambda_1 + \cdots + m_s\lambda_s = 0 \\ \vdots \\ m_1\lambda_1^n + \cdots + m_s\lambda_s^n = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \lambda_1 & \cdots & \lambda_s \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_1^{n-1} & \cdots & \lambda_s^{n-1} \end{pmatrix}}_{T} \begin{pmatrix} m_1\lambda_1 \\ m_2\lambda_2 \\ \vdots \\ m_s\lambda_s \end{pmatrix} = O$$

由于$\lambda_1, \dots, \lambda_s$两两不同,则$T$可逆,则$(m_1\lambda_1, \dots, m_s\lambda_s)^t = O$

于是$\lambda_1 = \cdots = \lambda_s = 0$,从而$\mathcal{X}_A(t) = t^n \Rightarrow A$幂零 ■

【16-5】AB-BA=B 的幂零判定

设有限维复向量空间V上的两个线性算子$\mathcal{A},\mathcal{B}$ 满足$\mathcal{AB}-\mathcal{BA}=\mathcal{B}$

求证:$\mathcal{B}$ 幂零

证:法一:对于$k=1,\dots,n$

$\operatorname{tr}\mathcal{B}^k=\operatorname{tr}\left(\mathcal{B}^{k-1}(\mathcal{AB}-\mathcal{BA})\right)=\operatorname{tr}(\mathcal{B}^{k-1}\mathcal{AB})-\operatorname{tr}(\mathcal{B}^k\mathcal{A})$

$=\operatorname{tr}(\mathcal{B}^{k-1}\mathcal{BA})-\operatorname{tr}(\mathcal{B}^k\mathcal{A})=\operatorname{tr}(\mathcal{B}^k\mathcal{A})-\operatorname{tr}(\mathcal{B}^k\mathcal{A})=0$

由习题 $16-2$ 可知 $\mathcal{B}$ 幂零

法二:$\mathcal{AB}-\mathcal{BA}=\mathcal{B}\Rightarrow\mathcal{BA}=(\mathcal{A}-\mathcal{E})\mathcal{B}$

断言:$\mathcal{AB}^k-\mathcal{B}^k\mathcal{A}=k\mathcal{B}^k,\forall k\in\mathbb{N}$

断言的证明:用归纳法,$k=1$ 时即为条件

假设$\mathcal{AB}^{k-1}-\mathcal{B}^{k-1}\mathcal{A}=(k-1)\mathcal{B}^{k-1},k-1\geq 0$

$\mathcal{AB}^k-\mathcal{B}^k\mathcal{A}=\mathcal{AB}^{k-1}\mathcal{B}-\mathcal{B}^k\mathcal{A}$

$=(\mathcal{B}^{k-1}\mathcal{A}+(k-1)\mathcal{B}^{k-1})\mathcal{B}-\mathcal{B}^k\mathcal{A}\quad$[归纳假设]

$=\mathcal{B}^{k-1}\mathcal{AB}+(k-1)\mathcal{B}^k-\mathcal{B}^k\mathcal{A}$

$=\mathcal{B}^{k-1}(\mathcal{B}+\mathcal{BA})+(k-1)\mathcal{B}^k-\mathcal{B}^k\mathcal{A}\quad$[条件]

$=\mathcal{B}^k+\mathcal{B}^k\mathcal{A}+(k-1)\mathcal{B}^k-\mathcal{B}^k\mathcal{A}$

$=k\mathcal{B}^k\quad\blacksquare$

对:$\mathcal{AB}^k-\mathcal{B}^k\mathcal{A}=k\mathcal{B}^k$两边取迹,则类似法一可证

此处可得$\mathcal{AB}^k=\mathcal{B}^k(\mathcal{A}+k\mathcal{E})$

则有$\forall f\in\mathbb{C}[t],f(\mathcal{A})\mathcal{B}^k=\mathcal{B}^kf(\mathcal{A}+k\mathcal{E})$

特别地,取$f=\mathcal{X}_{\mathcal{A}}$,则由$C-H$定理得

$\mathcal{O}=\mathcal{X}_{\mathcal{A}}(\mathcal{A})\mathcal{B}^k=\mathcal{B}^k\mathcal{X}_{\mathcal{A}}(\mathcal{A}+k\mathcal{E})$

取一组基将$\mathcal{A}$化为$Jordan$标准型,$\exists P\in GL_n(\mathbb{C})$

$\mathcal{X}_{\mathcal{A}}(\mathcal{A}+k\mathcal{E})=P\mathcal{X}_{\mathcal{A}}(J_{\mathcal{A}}+k\mathcal{E})P^{-1}$

$$= P\begin{pmatrix} \mathcal{X}_{\mathcal{A}}(\lambda_1 + k) & & * \\ & \ddots & \\ O & & \mathcal{X}_{\mathcal{A}}(\lambda_n + k) \end{pmatrix} P^{-1}$$

于是只需取k使得$\lambda_i + k$全不是$\mathcal{A}$的特征值即可使得$\mathcal{X}_{\mathcal{A}}(\mathcal{A} + k\mathcal{E})$可逆

于是由$\mathcal{O} = \mathcal{B}^k \mathcal{X}_{\mathcal{A}}(\mathcal{A} + k\mathcal{E})$可得$\mathcal{B}^k = \mathcal{O}$ ■

法三: 取一组基使得 $\mathcal{B}$ 在此基下的矩阵为$Jordan$标准型J_B

设此基下$\mathcal{A}$的矩阵为$A \in M_n(\mathbb{C})$,

不妨设$J_B = \mathrm{diag}(B_1, \dots, B_k)$, $B_i = J_{n_i}(\lambda_i)$为$Jordan$块

从而$\mathcal{A}\mathcal{B} - \mathcal{B}\mathcal{A} = \mathcal{B} \Leftrightarrow AB - BA = B$

此时对A作与B一致的分块,即$A = \begin{pmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{k1} & \cdots & A_{kk} \end{pmatrix}$

在此分块下,计算条件$AB - BA = A$

$$AB - BA = \begin{pmatrix} A_{11}B_1 - B_1A_{11} & & * \\ & \ddots & \\ * & & A_{kk}B_k - B_kA_{kk} \end{pmatrix} = \mathrm{diag}(B_1, \dots, B_k)$$

$\Rightarrow A_{ii}B_i - B_iA_{ii} = B_i = J_{n_i}(\lambda_i), i = 1, \dots, k$

取迹 $\Rightarrow 0 = \mathrm{tr}(A_{ii}B_i - B_iA_{ii}) = \mathrm{tr}J_{n_i}(\lambda_i) = n_i\lambda_i \Rightarrow \lambda_i = 0, i = 1, \dots, k$

则知 $\mathcal{B}$ 的$Jordan$块均为$J_{n_i}(0)$,从而 $\mathcal{B}$ 幂零 ■

【17-1】Jn0 的标准型和无法开方性

(i)求$J_n(0)^k$的$Jordan$标准型

(ii)对$n,k \in \mathbb{Z}$ 且$n,k \geq 2$,证明$X^k = J_n(0)$无解

解: $(i)k = 0$ 时,$J_n(0)^k = E$

$k = 1$ 时$J_n(0)^k = J_n(0)$

$k \geq n$时$J_n(0)^k = O$

当 $2 \leq k \leq n-1$ 时

设$J = J_n(0)$, 则$J^n = O$, 令$A = J^k$, 对n,k作带余除法

得$n = ik + q, 0 \leq q < k$

则$A^{i+1} = J^{k(i+1)} = J^{ki+k} = O$

$\Rightarrow \mu_A(t) = t^m, 1 \leq m \leq i+1$, 令$p(t) = t$

$\Rightarrow A$最大的$Jordan$块是$i+1$ 阶的

程序法: 计算$N(t,s), s = 0,1,\dots,i+1, \qquad r_{1,s} = \operatorname{rank} A^s$

$r_{1,0} = n$

$r_{1,1} = \operatorname{rank} A = n-k, \qquad \left[\because A = \begin{pmatrix} O & E_{n-k} \\ O & O \end{pmatrix}\right]$

$r_{1,2} = \operatorname{rank} A^2 = n-2k, \qquad \left[\because A^2 = \begin{pmatrix} O & E_{n-2k} \\ O & O \end{pmatrix}\right]$

$\dots r_{1,i} = n - ik, \qquad r_{1,s} = 0, s \geq i+1$

$\Rightarrow N(1,1) = 0, \dots, N(1,i-2) = 0$

$N(1,i-1) = r_{1,i-2} + r_{1,i} - 2r_{1,i-1} = 0$

$N(1,i) = r_{1,i+1} + r_{1,i-1} - 2r_{1,i} = 0 + n - (i-1)k - 2(n-ik)$

$= -n + ik + k$

$N(1,i+1) = r_{1,i+2} + r_{1,i} - 2r_{1,i+1} = n - ik$

$\therefore J_A$有$ki+k-n$个i阶$Jordan$块$J_i(0)$, $n-ik$个$i+1$ 阶$J_{i+1}(0)$

映射法:$J=\begin{pmatrix}0&1&&\\&0&\ddots&\\&&\ddots&1\\&&&0\end{pmatrix}$,$\mathcal{J}:F^n\to F^n,\vec{v}\mapsto J\vec{v}$

$\overrightarrow{e_n}\xrightarrow{\mathcal{J}}\overrightarrow{e_{n-1}}\xrightarrow{\mathcal{J}}\cdots\xrightarrow{\mathcal{J}}\overrightarrow{e_2}\xrightarrow{\mathcal{J}}\overrightarrow{e_1}\xrightarrow{\mathcal{J}}\vec{0}$

$$\begin{array}{ccccccccc}
\overrightarrow{e_n} & \to & \overrightarrow{e_{n-1}} & \to\cdots\to & \overrightarrow{e_{ik+1}} & \to & \overrightarrow{e_{ik}} & \to\cdots\to & \overrightarrow{e_{n-k+1}}\\
\downdownarrows & & \downdownarrows & & \downdownarrows & & \downdownarrows & & \downdownarrows\\
\overrightarrow{e_{n-k}} & \to & \overrightarrow{e_{n-k-1}} & \to\cdots\to & \overrightarrow{e_{(i-1)k+1}} & \to & \overrightarrow{e_{(i-1)k}} & \to\cdots\to & \overrightarrow{e_{n-2k+1}}\\
\downdownarrows & & \downdownarrows & & \downdownarrows & & \downdownarrows & & \downdownarrows\\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots\\
\downdownarrows & & \downdownarrows & & \downdownarrows & & \downdownarrows & & \downdownarrows\\
\overrightarrow{e_{n-ik+k}} & & \overrightarrow{e_{n-ik+k-1}} & \to\cdots\to & \overrightarrow{e_{k+1}} & \to & \overrightarrow{e_k} & \to\cdots\to & \overrightarrow{e_{n-ik+1}}\\
\downdownarrows & & \downdownarrows & & \downdownarrows & & & & \\
\overrightarrow{e_{n-ik}} & \to & \overrightarrow{e_{n-ik-1}} & \to\cdots\to & \overrightarrow{e_1} & & & & \\
 & & & & & & & & \\
J_{i+1}(0) & & J_{i+1}(0) & \cdots & J_{i+1}(0) & & J_i(0) & \cdots & J_i(0)
\end{array}$$

$\to$ 表示$\mathcal{J}$, $\downdownarrows$ 表示$\mathcal{J}^k$, $J_n(0)-shift$算子

注意到$A=J^k$对应的线性算子$\mathcal{A}$,可从上表中找出

满足$\mathcal{A}(\overrightarrow{e_n},\overrightarrow{e_{n-k}},\dots,\overrightarrow{e_{n-ik}})=(\overrightarrow{e_{n-k}},\overrightarrow{e_{n-2k}},\dots,\vec{0})$ $[i+1$ 个基$]$

$\mathcal{A}(\overrightarrow{e_{n-1}},\overrightarrow{e_{n-k-1}},\dots,\overrightarrow{e_{n-ik-1}})=(\overrightarrow{e_{n-k-1}},\overrightarrow{e_{n-2k-1}},\dots,\vec{0})$ $[i+1$ 个基$]$

$\mathcal{A}(\overrightarrow{e_{ik}},\overrightarrow{e_{(i-1)k}},\dots,\overrightarrow{e_k})=(\overrightarrow{e_{(i-1)k}},\overrightarrow{e_{(i-2)k}},\dots,\vec{0})$ $[i$个基$]$

则将V的基$\overrightarrow{e_1},\dots,\overrightarrow{e_n}$按上面的列顺序重排后可得在新的基下

$\mathcal{A}$的矩阵为 $\operatorname{diag}\left(\underbrace{J_i(0)}_{ik+k-n个},\underbrace{J_{i+1}(0)}_{n-ik个}\right)$

(ii)设X是$X^k=J_n(0)$的解

$\Rightarrow X^{kn}=0\Rightarrow \operatorname{spec}_F X=\{0,\dots,0\}$

设$J_X=\operatorname{diag}\left(J_{n_1}(0),\dots,J_{n_s}(0)\right)$

$\because X^k=J_n(0),X\sim_s J_X\quad\therefore J_X^k\sim_s J_n(0)$

而$J_n(0)$只有一个n阶$Jordan$块

但由(a),$n,k\geq 2$ 时J_X^k的$Jordan$块一定小于n阶,矛盾 ■

【17-2】AX=XB 线性空间的性质

设$A,C \in M_m(\mathbb{C}),B,D \in M_n(\mathbb{C})$

令$U(A,B)=\{X \in \mathbb{C}^{m\times n}|AX=XB\}$为一个复线性空间,求证

(a)若$A\sim_s C,B\sim_s D$,构造一个$U(A,B)$到$U(C,D)$的线性同构

$(b)\forall f \in \mathbb{C}[t],U(A,B)$是$U\big(f(A),f(B)\big)$的子空间

$(c)\operatorname{spec}_{\mathbb{C}} A \cap \operatorname{spec}_{\mathbb{C}} B=\emptyset$,则$U(A,B)=\{O\}$

(d)[平方根唯一的一个条件]当$m=n$时,

$\operatorname{spec}_{\mathbb{C}} A \cap \operatorname{spec}_{\mathbb{C}}(-B)=\emptyset \wedge\ A^2=B^2 \Rightarrow A=B$

$(e)\dim U\big(J_m(\lambda),J_n(\mu)\big)=\begin{cases}0 & \lambda \neq \mu \\ \min\{m,n\} & \lambda=\mu\end{cases}$

(f)设$\{p_1,\dots,p_s\}$为A的初等因子组,$\{q_1,\dots,q_t\}$为B的初等因子组

则$\dim U(A,B)=\displaystyle\sum_{i=1}^{j}\sum_{j=1}^{t}\deg\gcd\big(p_i,q_j\big)$

证:$(a)\exists P \in GL_m(\mathbb{C}),Q \in GL_n(\mathbb{C})$,使得$A=P^{-1}CP,B=Q^{-1}DQ$

$AX=XB \Leftrightarrow P^{-1}CPX=XQ^{-1}DQ \Leftrightarrow CPXQ^{-1}=PXQ^{-1}D$

则令$\varphi:U(A,B)\to U(C,D),X\mapsto PXQ^{-1}$

$\psi:U(C,D)\to U(A,B),Y\mapsto P^{-1}YQ$

则φ,ψ都线性,且$\varphi\circ\psi=Id,\psi\circ\varphi=Id \Rightarrow \varphi,\psi$互逆

$\therefore \varphi$是线性同构

$(b)AX=XB \Rightarrow A^kX=A^{k-1}XB=\cdots=XB^k$

$$\Rightarrow \forall a,b \in \mathbb{C},k,l \in \mathbb{N},\qquad \begin{aligned}(aA^k+bA^l)X&=aA^kX+bA^lX\\&=aXB^k+bXB^l\\&=X(aB^k+bB^l)\end{aligned}$$

$\Rightarrow f(A)X=Xf(B)\Rightarrow X \in U\big(f(A),f(B)\big)$

验证子空间: 设$X, Y \in U(A, B), a \in \mathbb{C}$ 则

$A(X+Y) = AX + AY = XB + YB = (X+Y)B \Rightarrow (X+Y) \in U(A, B)$

且$A(aX) = aAX = aXB = (aX)B \Rightarrow aX \in U(A, B)$

于是$U(A, B)$是$U\big(f(A), f(B)\big)$的子空间

(c)只需证若A, B没有公共特征值, 则$AX = XB$只有零解

由$(b), U(A, B) \subseteq U\big(f(A), f(B)\big), \forall f \in \mathbb{C}[t]$

取$f = \mathcal{X}_A$, 则$\mathcal{X}_A(A) = O$

$U\big(\mathcal{X}_A(A), \mathcal{X}_A(B)\big) = U\big(O, \mathcal{X}_A(B)\big)$

对$X \in U\big(O, \mathcal{X}_A(B)\big), OX = X\mathcal{X}_A(B)$

$\because OX = O \quad \therefore X\mathcal{X}_A(B) = O$

由谱映射定理, $\operatorname{spec}_{\mathbb{C}} \mathcal{X}_A(B) = \mathcal{X}_A(\operatorname{spec}_{\mathbb{C}} B) \not\ni 0$

则$\mathcal{X}_A(B)$可逆, 则由$X\mathcal{X}_A(B) = O \Rightarrow X = O$

于是$U(A, B) \subseteq U\big(\mathcal{X}_A(A), \mathcal{X}_A(B)\big) = \{O\} \Rightarrow U(A, B) = \{O\}$

(d)条件$\Rightarrow U(A, -B) = \{O\}$

$A^2 = B^2 \Leftrightarrow A^2 - AB = B^2 - AB \Leftrightarrow A(A-B) = (A-B)(-B)$

$\Leftrightarrow A - B \in U(A, -B) = \{O\} \Leftrightarrow A = B$

(e)若$\lambda \neq \mu$, 则由(c)易得$\dim U\big(J_m(\lambda), J_n(\mu)\big) = 0$

若$\lambda = \mu, X \in \dim U\big(J_m(\lambda), J_n(\mu)\big) \Leftrightarrow J_m(\lambda)X = XJ_n(\lambda)$

$\Leftrightarrow J_m(0)X = XJ_n(0) \quad [\because J_m(\lambda) = J_m(0) + \lambda E_m]$

不妨设$m \leq n$, 否则取转置有$J_n(\lambda)^t X^t = X^t J_m(\lambda)$, 情况类似

令$\overrightarrow{e_n} = (0, \ldots, 0, 1)^t \in \mathbb{C}^n, X = (X_1, \ldots, X_n)$

则$X_{n-1} = X\overrightarrow{e_{n-1}} = XJ_n(0)\overrightarrow{e_n} = J_m(0)X\overrightarrow{e_n} = J_m(0)X_n$

$X_{n-2}=X\overrightarrow{e_{n-2}}=XJ_n(0)\overrightarrow{e_{n-1}}=J_m(0)X_{n-1}=J_m(0)^2X_n$

$\dots X_1=J_m(0)^{n-1}X_n$

从而X仅由X_n决定,可直接验证

$\mathbb{C}^m\to U\big(J_m(0),J_n(0)\big),X_n\mapsto (J_m(0)^nX_n,\dots,J_m(0)X_n,X_n)$是线性同构

则$\dim U\big(J_m(\lambda),J_n(\lambda)\big)=\dim U\big(J_m(0),J_n(0)\big)=m=\min\{m,n\}$

(f)不妨设$A=J_A=\mathrm{diag}\left(J_{n_1}(\lambda_1),\dots,J_{n_s}(\lambda_s)\right)$

$B=J_B=\mathrm{diag}\left(J_{m_1}(\mu_1),\dots,J_{m_t}(\mu_t)\right)$

$X=\left(X_{ij}\right)_{\substack{i=1,\dots,s\\ j=1,\dots,t}}$为分块矩阵,$X_{ij}$为$n_i$行$m_j$列

则$AX=XB\Leftrightarrow J_{n_i}(\lambda_1)X_{ij}=X_{ij}J_{m_j}\big(\mu_j\big)$

$\Rightarrow$令$V_{ij}=\left\{X=\left(X_{ij}\right)\middle|\text{除}X_{ij},\text{其他块为}O,\text{且}J_{n_i}(\lambda_i)X_{ij}=X_{ij}J_{m_j}\big(\mu_j\big)\right\}$

不难验证 $U(A,B)=\bigoplus_{i=1}^{s}\bigoplus_{j=1}^{t}V_{ij},\qquad V_{ij}\cong U\left(J_{n_i}(\lambda_i),J_{m_j}\big(\mu_j\big)\right)$

则有 $\dim U(A,B)=\sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{t}\dim V_{ij}=\sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{t}\dim U\left(J_{n_i}(\lambda_i),J_{m_j}\big(\mu_j\big)\right)$

$\sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{t}\min\{n_i,\mu_j\}=\sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{t}\deg\gcd(p_i,q_j)$

【17-3】体积计算

欧氏空间中体积计算:$Vol\big(P(\overrightarrow{v_1},\dots,\overrightarrow{v_s})\big)=\sqrt{\det G(\overrightarrow{v_1},\dots,\overrightarrow{v_s})}$

【17-4】互相成钝角向量数有限

设V是n维欧氏空间,$\overrightarrow{v_1},\dots,\overrightarrow{v_m}\in V\setminus\{\vec{0}\}$,两两成钝角,则$m\le n+1$

证:对n归纳,若$n=1,V=\langle\vec{\alpha}\rangle,\vec{\alpha}\ne\vec{0}$

若$m=3$,对$i=1,2,3,\qquad \overrightarrow{v_i}=k_i\vec{\alpha},k_i\ne 0$

$\overrightarrow{v_i}\cdot\overrightarrow{v_j}=k_ik_j|\vec{\alpha}|^2<0,i\ne j$

$$\Rightarrow\begin{cases}k_1k_2<0\\k_2k_3<0\\k_1k_3<0\end{cases}\Rightarrow k_1k_2^2k_3>0,k_1k_3<0,\text{矛盾}$$

$\Rightarrow m\le 2$

假设对$\dim V=n-1$,最多有n个非零向量两两成钝角

当$\dim V=n$时,设$\overrightarrow{v_1},\dots,\overrightarrow{v_m}\in V\setminus\{\vec{0}\},\overrightarrow{v_i}\cdot\overrightarrow{v_j}<0,i\ne j$

考虑$W=\langle v_m\rangle^{\perp}$

令$\overrightarrow{w_i}=\overrightarrow{v_i}-\dfrac{(\overrightarrow{v_i}\cdot\overrightarrow{v_m})\overrightarrow{v_m}}{(\overrightarrow{v_m}\cdot\overrightarrow{v_m})},i=1,\dots,m-1$

易验证$\overrightarrow{w_i}\in W,i=1,\dots,m-1$

且$\overrightarrow{w_i}\cdot\overrightarrow{w_j}$

$$=\overrightarrow{v_i}\cdot\overrightarrow{v_j}-\frac{(\overrightarrow{v_i}\cdot\overrightarrow{v_m})(\overrightarrow{v_m}\cdot\overrightarrow{v_j})}{(\overrightarrow{v_m}\cdot\overrightarrow{v_m})}-\frac{(\overrightarrow{v_j}\cdot\overrightarrow{v_m})(\overrightarrow{v_m}\cdot\overrightarrow{v_i})}{(\overrightarrow{v_m}\cdot\overrightarrow{v_m})}+\frac{(\overrightarrow{v_i}\cdot\overrightarrow{v_m})(\overrightarrow{v_j}\cdot\overrightarrow{v_m})(\overrightarrow{v_m}\cdot\overrightarrow{v_m})}{(\overrightarrow{v_m}\cdot\overrightarrow{v_m})^2}$$

$$=\overrightarrow{v_i}\cdot\overrightarrow{v_j}-\frac{(\overrightarrow{v_i}\cdot\overrightarrow{v_m})(\overrightarrow{v_m}\cdot\overrightarrow{v_j})}{(\overrightarrow{v_m}\cdot\overrightarrow{v_m})}<0$$

因此$\overrightarrow{w_i},\overrightarrow{w_j}$在$W$中两两成钝角

由归纳假设,$m-1\le n$

$\Rightarrow m\le n+1$

注:$n+1$ 是可以取到的.

设$\vec{\alpha} \in V, |\vec{\alpha}| = 1$,按归纳在$\langle\alpha\rangle^{\perp}$中取$\overrightarrow{w_1}, \dots, \overrightarrow{w_n}$使得$\overrightarrow{w_i} \cdot \overrightarrow{w_j} < 0$

考虑$\overrightarrow{v_i} = \overrightarrow{w_i} + \lambda\vec{\alpha}, i = 1, \dots, n, \overrightarrow{v_{n+1}} = \vec{\alpha}$

则$\overrightarrow{v_i} \cdot \overrightarrow{v_{n+1}} = \lambda, \overrightarrow{v_i} \cdot \overrightarrow{v_j} = \overrightarrow{w_i} \cdot \overrightarrow{w_j} + \lambda^2$

则取λ充分小就可使得$\overrightarrow{v_i} \cdot \overrightarrow{v_{n+1}} < 0, \overrightarrow{v_i} \cdot \overrightarrow{v_j} < 0$■

【18-1】GS 正交化求标准正交基例

$\mathbb{R}^4$带标准内积,令$\vec{v} = (1,5,-8,-1)^t$

用正交化方法求出$\langle v\rangle^{\perp}$的一组单位正交基

解:记$W = \langle\vec{v}\rangle$,求$W^{\perp}$

$x \in W^{\perp} \Leftrightarrow \vec{x} \cdot \vec{w} = 0, \forall\vec{w} \in W$

$\Leftrightarrow \vec{x} \cdot k\vec{v} = 0, \forall k \in \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow \vec{x} \cdot \vec{v} = \vec{x}^t\vec{v} = (x_1, x_2, x_3, x_4)(1,5,-8,-1)^t$

$= x_1 + 5x_2 - 8x_3 - x_4 = 0$

得基础解系$\overrightarrow{\varepsilon_1} = (1,0,0,1)^t, \overrightarrow{\varepsilon_2} = (0,1,0,5)^t, \overrightarrow{\varepsilon_3} = (0,0,1,-8)^t$

即$W^{\perp} = \langle\overrightarrow{\varepsilon_1}, \overrightarrow{\varepsilon_2}, \overrightarrow{\varepsilon_3}\rangle$

用正交化方法从$\{\overrightarrow{\varepsilon_1}, \overrightarrow{\varepsilon_2}, \overrightarrow{\varepsilon_3}\}$得到一组标准正交基

$\overrightarrow{e_1} = \dfrac{\overrightarrow{\varepsilon_1}}{|\overrightarrow{\varepsilon_1}|} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(1,0,0,1)^t$

$\overrightarrow{e_2}' = \overrightarrow{\varepsilon_2} - (\overrightarrow{\varepsilon_2} \cdot \overrightarrow{e_1})\overrightarrow{e_1} = (-5/2,1,0,5/2)^t$

$\overrightarrow{e_2} = \dfrac{\overrightarrow{e_2}'}{|\overrightarrow{e_2}'|} = \dfrac{1}{\sqrt{54}}(-5,2,0,5)^t$

$\overrightarrow{e_3}' = \overrightarrow{\varepsilon_3} - (\overrightarrow{\varepsilon_3} \cdot \overrightarrow{e_1})\overrightarrow{e_1} - (\overrightarrow{\varepsilon_3} \cdot \overrightarrow{e_2})\overrightarrow{e_2} = 1/27(8,40,27,-8)^t$

$\overrightarrow{e_3} = \dfrac{\overrightarrow{e_3}'}{|\overrightarrow{e_3}'|} = \dfrac{1}{\sqrt{2457}}(8,40,27,-8)^t$

于是$\{\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}\}$为$\langle\vec{v}\rangle^{\perp}$的一组标准正交基

【18-2】正交向量组成矩阵的逆

设实方阵各列都是非零向量,且相互正交,求其逆

解: 令$A=\left(\overrightarrow{A_1},\dots,\overrightarrow{A_n}\right)$

由题条件知$\overrightarrow{A_\imath}\neq\vec{0}\Rightarrow\overrightarrow{A_\imath}\cdot\overrightarrow{A_\imath}=\overrightarrow{A_\imath}^t\overrightarrow{A_\imath}=:\alpha_i\neq 0$

且$\overrightarrow{A_\imath}\cdot\overrightarrow{A_\jmath}=\overrightarrow{A_\imath}^t\overrightarrow{A_\jmath}=0,i\neq j$

可知$A^tA=D=\operatorname{diag}(\alpha_1,\dots,\alpha_n)$, 且$D$可逆

从而$D^{-1}A^tA=E$

由于E是方阵, 则A可逆且$A^{-1}=D^{-1}A^t$ ■

【18-3】Householder 变换

$\mathbb{R}^n$带标准内积, $\vec{v}\in\mathbb{R}^n$满足$|\vec{v}|=1$, 令$H_v=E-2\vec{v}\vec{v}^t\in M_n(\mathbb{R})$

此矩阵被称为镜面反射或$Householder$变换. 求证:

$(i)H_v^tH_v=E,H_v^t=H_v,H_v^2=E$. 特别地, H_v是正交矩阵

$(ii)H_v$由特征子空间$V^{-1}=\langle\vec{v}\rangle,V^1=\langle\vec{v}\rangle^\perp$, 进而$\det H_v=-1$

因此H_v被称作镜面反射

$(iii)\forall A\in O_n(\mathbb{R})$, 存在有限个单位向量$\overrightarrow{v_1},\dots,\overrightarrow{v_s}\in\mathbb{R}^n$(不必两两不同)

使得$A=H_{v_1}H_{v_2}\cdots H_{v_s}$, 即正交群由镜面反射群生成

证: $(i)H_v^t=(E-2\vec{v}\vec{v}^t)^t=E-2(\vec{v}\vec{v}^t)^t$

$=E-2(\vec{v}^t)^t\vec{v}^t=E-2\vec{v}\vec{v}^t=H_v$

$H_v^2=(E-2\vec{v}\vec{v}^t)(E-2\vec{v}\vec{v}^t)=E\cdot E-2\vec{v}\vec{v}^t-2\vec{v}\vec{v}^t+4\vec{v}\vec{v}^t\vec{v}\vec{v}^t$

$=E-4\vec{v}\vec{v}^t+4\vec{v}\vec{v}^t=E\quad[\vec{v}^t\vec{v}=\vec{v}\cdot\vec{v}=|\vec{v}^2|=1]$

$\therefore H_v^t$是正交矩阵

(ii)对$\lambda = 1, H_v\vec{x} = \vec{x} \Leftrightarrow (E - 2\vec{v}\vec{v}^t)\vec{x} = \vec{x} \Leftrightarrow \vec{x} - 2\vec{v}\vec{v}^t\vec{x} = \vec{x}$

$\Leftrightarrow (\vec{v}\vec{v}^t)\vec{x} = \vec{0}$

$\Rightarrow \vec{v}^t(\vec{v}\vec{v}^t\vec{x}) = 0 \Rightarrow (\vec{v}^t\vec{v})\vec{v}^t\vec{x} = 0$ [矩阵乘法结合律]

$\Rightarrow \vec{v} \cdot \vec{x} = 0 \Rightarrow \vec{x} \in \langle\vec{v}\rangle^\perp$

$x \in \langle\vec{x}\rangle^\perp \Rightarrow \vec{v}^t\vec{x} = 0 \Rightarrow \vec{v}\vec{v}^t\vec{x} = \vec{0} \Rightarrow \vec{x} \in V^1$

$\therefore V^1 = \langle\vec{v}\rangle^\perp$

另一方面,$\vec{x} \in V^{-1} \Leftrightarrow H_v\vec{x} = -\vec{x} \Rightarrow \vec{x} - 2\vec{v}\vec{v}^t\vec{x} = -\vec{x}$

$\Leftrightarrow \vec{x} = \vec{v}(\vec{v}^t\vec{x}) = (\vec{v}^t\vec{x})\vec{v}$ [$\vec{v}^t\vec{x}$是一个数]

$\Leftrightarrow \vec{x} \in \langle\vec{v}\rangle \quad \therefore V^{-1} = \langle\vec{v}\rangle$

(iii)引理:$\forall\vec{x},\vec{y} \in \mathbb{R}^n, \vec{x} \neq \vec{y}$,

则$\exists$单位向量$\vec{v}$,使得$H_v\vec{x} = \vec{y} \Leftrightarrow |\vec{x}| = |\vec{y}|$

引理的证明: $\Rightarrow$:$\vec{y}^t\vec{y} = \vec{x}^tH_v^tH_v\vec{x} = \vec{x}^t\vec{x}$,即$|\vec{x}|^2 = |\vec{y}|^2$

$\Leftarrow$:令$\vec{v} = \dfrac{\vec{y} - \vec{x}}{|\vec{y} - \vec{x}|}$

$$\vec{v} \cdot (\vec{x} + \vec{y}) = \frac{1}{|\vec{y} - \vec{x}|}\big((\vec{y} - \vec{x}) \cdot (\vec{y} + \vec{x})\big) = \frac{|\vec{y}|^2 - |\vec{x}|^2}{|\vec{y} - \vec{x}|} = 0$$

则$(\vec{x} + \vec{y}) \perp \vec{v} \Rightarrow H_v(\vec{x} + \vec{y}) = \vec{x} + \vec{y}$

另一方面,$\vec{y} - \vec{x} \in \langle\vec{v}\rangle \Rightarrow H_v(\vec{y} - \vec{x}) = \vec{x} - \vec{y}$

$$\begin{cases} H_v\vec{x} + H_v\vec{y} = \vec{x} + \vec{y} \\ H_v\vec{y} - H_v\vec{x} = \vec{x} - \vec{y} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} H_v\vec{x} = \vec{y} \\ H_v\vec{y} = \vec{x} \end{cases} \quad \blacksquare$$

对n归纳:$n = 1$ 时,$O_1(\mathbb{R}) = \{(1), (-1)\}$

$\overrightarrow{e_1} = (1), H_{e_1} = E_1 - 2\overrightarrow{e_1}\overrightarrow{e_1}^t = (-1)$

$(-1) = (-1), \qquad (1) = (-1) \times (-1) = H_{e_1}H_{e_1}$

设对$B \in O_{n-1}(\mathbb{R})$,$B$是有限个反射的乘积

对$A \in O_n(\mathbb{R}), A = \big(A^{(1)} \cdots A^{(n)}\big)$,则$A^{(1)}, \dots, A^{(n)}$是$\mathbb{R}^n$的单位正交基

$\therefore \left|A^{(1)}\right| = 1 \quad \because |\overrightarrow{e_1}| = 1 \quad \therefore$ 可取$\overrightarrow{e_1} = (1,0,\dots,0)^t$

$\exists \vec{v}$,使得$H_v A^{(1)} = \overrightarrow{e_1}$

$H_v A = \left(H_v A^{(1)} \cdots H_v A^{(n)}\right) = \left(e_1, H_v A^{(2)}, \dots, H_v A^{(n)}\right) = \begin{pmatrix} 1 & * \\ O & A_{n-1} \end{pmatrix}$

$\because H_v$是正交矩阵 $\therefore\ \overrightarrow{e_1}, H_v A^{(2)}, \dots, H_v A^{(n)}$也是单位正交基

$\therefore H_v A^{(2)}, \dots, H_v A^{(n)} \in \langle \overrightarrow{e_1} \rangle^{\perp} = \{(0,**)^t \in \mathbb{R}^n\}$

$\therefore\ H_v A = \begin{pmatrix} 1 & O \\ O & A_{n-1} \end{pmatrix} \quad \because H_v, A$均为正交矩阵 $\quad \therefore H_v A$也是正交矩阵

则$(H_v A)^t (H_v A) = \begin{pmatrix} 1 & O \\ O & A_{n-1}^t A_{n-1} \end{pmatrix} = E \Rightarrow A_{n-1}^t A_{n-1} = E_{n-1}$

$\Rightarrow A_{n-1}$也正交

由归纳假设,$A_{n-1} = H_{\widetilde{v_2}} \cdots H_{\widetilde{v_s}}, \overrightarrow{\widetilde{v_i}} \in \mathbb{R}^{n-1}, \left|\overrightarrow{\widetilde{v_i}}\right| = 1$

令$\overrightarrow{v_i} = \begin{pmatrix} 0 \\ \overrightarrow{\widetilde{v_i}} \end{pmatrix} \in \langle \overrightarrow{e_1} \rangle^{\perp} \subset \mathbb{R}^n$,则$|\overrightarrow{v_i}| = 1, \qquad i = 2, \dots, s$

$H_{v_i} = E_n - 2\overrightarrow{v_i}\overrightarrow{v_i}^t = E_n - 2\begin{pmatrix} 0 & O \\ O & \overrightarrow{\widetilde{v_i}}\overrightarrow{\widetilde{v_i}}^t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \\ & H\overrightarrow{\widetilde{v_i}} \end{pmatrix}$

$\therefore H_v A = H_{v_2} \cdots H_{v_s} \Rightarrow A = H_v^{-1} H_{v_2} \cdots H_{v_s} = H_v H_{v_2} \cdots H_{v_s}$

记$\vec{v} = \overrightarrow{v_1}$即可

注:证明写法偏向矩阵技巧,但是其实有非常明显的几何特征■

【18-4】QR 分解:Householder 算法

$\forall A \in GL_n(\mathbb{R}), \exists Q \in O_n(\mathbb{R}), R$是上三角矩阵,使得$A = QR$

且$\det A = \pm \det R$.若R主对角元素皆正,则Q, R唯一

证:(i)存在性:法一:GS正交化方法（略）

法二:反射矩阵法

记$A=A_n=\left(A_n^{(1)},\dots,A_n^{(n)}\right)$

由 $18-1(iii)$中引理,$\exists$单位向量$\overrightarrow{v_1}\in\mathbb{R}^n$,

使得$H_{v_1}A_n^{(1)}=\left|A_n^{(1)}\right|\overrightarrow{e_1}$,　　$\overrightarrow{e_1}=(1,0,\dots,0)^t$,$\left|A_n^{(1)}\right|\neq 0$

则$H_{v_1}A_n=\begin{pmatrix}\left|A_n^{(1)}\right| & * \\ O & A_{n-1}\end{pmatrix}\Rightarrow A_{n-1}$可逆

令$A_{n-1}=\left(A_{n-1}^{(2)},\dots,A_{n-1}^{(n)}\right)$,则可重复上述过程,得到

$$H_{v_2}H_{v_1}A_n=\begin{pmatrix}1 & O \\ O & H_{v_2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\left|A_n^{(1)}\right| & * \\ O & A_{n-1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\left|A_n^{(1)}\right| & * \\ O & H_{v_2}A_{n-1}\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}\left|A_n^{(1)}\right| & * & * \\ 0 & \left|A_n^{(2)}\right| & * \\ O & O & A_{n-2}\end{pmatrix}$$

$\therefore$ 至多可以用n个反射得到$H_{v_s}\cdots H_{v_1}A$是上三角矩阵

令$R=H_{v_s}\cdots H_{v_1}A$,于是$A=H_{v_1}^{-1}\cdots H_{v_s}^{-1}R=H_{v_1}\cdots H_{v_s}R$

令$Q=H_{v_1}\cdots H_{v_s}$即可

唯一性:若有两个分解$A=Q_1R_1=Q_2R_2$　　R_1,R_2主对角元皆正

则$Q_2^{-1}Q_1=R_2R_1^{-1}\Rightarrow Q_2^{-1}Q_1$正交,$R_2R_1^{-1}$上三角且主对角元仍皆正

$\left[\text{易验证}R\text{上三角}\Rightarrow R^{-1}\text{上三角},R\text{主对角元皆正}\Rightarrow R^{-1}\text{主对角元皆正}\right]$

而一个矩阵既正交又是上三角矩阵,主对角元皆正,那么它一定是E

$[M^t=M^{-1},M$上三角$\Rightarrow M$除对角线上其余位置均为零,

对角上$m_{ii}=\dfrac{1}{m_{ii}},m_{ii}>0\Rightarrow m_{ii}=1]$

则$Q_2^{-1}Q_1=R_2R_1^{-1}=E\Rightarrow Q_1=Q_2,R_1=R_2$　　■

【19-1】求正交矩阵化对角形例

对实对称方阵$A=\begin{pmatrix}2&2&-2\\2&5&-4\\-2&-4&5\end{pmatrix}$,$\mathcal{X}_A=(t-1)^2(t-10)$

求正交矩阵P使得P^tAP为对角形

方法: 1. 设$\alpha,\beta\in\operatorname{spec}A$, 当$\alpha\neq\beta$时 $V^\alpha\perp V^\beta$

2. $G-S$正交化

解: 令$\lambda_1=10,\lambda_2=1$

则解$(A-\lambda_1E)\vec{x}=O\Rightarrow V^{\lambda_1}=\langle\overrightarrow{\alpha_1}\rangle$

$\overrightarrow{\alpha_1}=(-1,-2,2)^t$

解$(A-\lambda_2E)\vec{x}=O\Rightarrow V^{\lambda_2}=\langle\overrightarrow{\alpha_2},\overrightarrow{\alpha_3}\rangle$

$\overrightarrow{\alpha_2}=(2,-1,0)^t,\overrightarrow{\alpha_3}=(2,0,1)^t$

由实对称方阵可知不同特征值的特征向量垂直

即$\overrightarrow{\alpha_1}\perp\overrightarrow{\alpha_2},\overrightarrow{\alpha_1}\perp\overrightarrow{\alpha_3}$

对$\overrightarrow{\alpha_2},\overrightarrow{\alpha_3}$作正交化,$\overrightarrow{\varepsilon_2}=\dfrac{\overrightarrow{\alpha_2}}{|\overrightarrow{\alpha_2}|}=\dfrac{1}{\sqrt{5}}(2,-1,0)^t$

$\overrightarrow{\varepsilon_3}'=\overrightarrow{\alpha_3}-(\overrightarrow{\alpha_3}\cdot\overrightarrow{\varepsilon_2})\overrightarrow{\varepsilon_2}=\dfrac{1}{\sqrt{5}}(2,4,5)^{\mathrm{t}}$

$\overrightarrow{\varepsilon_3}=\dfrac{\overrightarrow{\varepsilon_3}'}{|\overrightarrow{\varepsilon_3}'|}=\dfrac{1}{\sqrt{45}}(2,4,5)^t$

则$\langle\overrightarrow{\alpha_2},\overrightarrow{\alpha_3}\rangle=\langle\overrightarrow{\varepsilon_2},\overrightarrow{\varepsilon_3}\rangle$

$\Rightarrow\overrightarrow{\varepsilon_2}\perp\overrightarrow{\alpha_1},\overrightarrow{\varepsilon_3}\perp\overrightarrow{\alpha_1}$

令$\overrightarrow{\varepsilon_1}=\dfrac{\overrightarrow{\alpha_1}}{|\overrightarrow{\alpha_1}|}=\dfrac{1}{3}(-1,-2,2)^t$

则$\{\overrightarrow{\varepsilon_1},\overrightarrow{\varepsilon_2},\overrightarrow{\varepsilon_3}\}$是$\mathbb{R}^3$的一组单位正交基

且$A\overrightarrow{\varepsilon_1}=10\overrightarrow{\varepsilon_1},A\overrightarrow{\varepsilon_2}=\overrightarrow{\varepsilon_2},A\overrightarrow{\varepsilon_3}=\overrightarrow{\varepsilon_3}$

令$P=(\overrightarrow{\varepsilon_1},\overrightarrow{\varepsilon_2},\overrightarrow{\varepsilon_3})$, 则$P$正交,$P^tAP=\operatorname{diag}(10,1,1)$

【19-2】**正交矩阵行列式的性质**

设A,B是正交矩阵且$\det A+\det B=0$，求证$A+B$不可逆

解: 只需证$\det(A+B)=0$

$(\det A)(\det(A+B))=(\det A^t)(\det(A+B))=\det(A^tA+A^tB)$

$=\det(E+A^tB)$

$(\det B)(\det(A+B))=(\det B^t)(\det(A+B))=\det(B^tA+B^tB)$

$=\det(E+B^tA)$

$\because (E+A^tB)^t=(E^t+B^t(A^t)^t)=(E+B^tA)$

$\therefore \det(E+A^tB)=\det(E+B^tA)$

$\Rightarrow (\det A)(\det(A+B))=(\det B)(\det(A+B))$

$\because \det B=-\det A$

$\therefore 2\det A\,(\det(A+B))=0$

$\because A$正交 $\therefore \det A=\pm 1$

$\therefore \det(A+B)=0$ ■

【19-3】二次型值域与特征值的联系

设A为实对称矩阵,$\lambda_1 \le \cdots < \lambda_n$为$A$的特征值,求证

$(i)\dfrac{(A\vec{x})\cdot\vec{x}}{\vec{x}\cdot\vec{x}} \le \lambda_n, \vec{x} \ne \vec{0}$,等号当且仅当$\vec{x} \in V^{\lambda_n} \setminus \{\vec{0}\}$时取到

$(ii)\lambda_k = \min\limits_{\dim U = k}\left(\max\limits_{\vec{x}\in U\setminus\{\vec{0}\}}\dfrac{(A\vec{x})\cdot\vec{x}}{\vec{x}\cdot\vec{x}}\right)$ 其中最小值对所有k维子空间U取

证: $(i)A$对称 $\Rightarrow A = A^t$

$\therefore \exists P \in O_n(\mathbb{R})$,使得$A = P^tDP, D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$

$(A\vec{x})\cdot\vec{x} = (A\vec{x})^t\vec{x} = \vec{x}^tA^t\vec{x} = \vec{x}^tA\vec{x}$

$= \vec{x}^tP^tDP\vec{x} = (P\vec{x})^tD(P\vec{x})$

令$\vec{y} = P\vec{x}$,则$(A\vec{x})\cdot\vec{x} = \vec{y}^tD\vec{y} = \lambda_1y_1^2 + \cdots + \lambda_ny_n^2$

且$\vec{x}\cdot\vec{x} = \vec{x}^t\vec{x} = \vec{x}^tP^tP\vec{x} = \vec{y}\cdot\vec{y} = y_1^2 + \cdots + y_n^2$

$\therefore \dfrac{(A\vec{x})\cdot\vec{x}}{\vec{x}\cdot\vec{x}} = \dfrac{\lambda_1y_1^2 + \cdots + \lambda_ny_n^2}{y_1^2 + \cdots + y_n^2} \le \dfrac{\lambda_n(y_1^2 + \cdots + y_n^2)}{y_1^2 + \cdots + y_n^2} = \lambda_n$

设$\lambda_{s-1} \le \lambda_s < \lambda_{s+1} = \lambda_{s+2} = \cdots = \lambda_n$

则$V^{\lambda_n} = \langle\overrightarrow{e_{s+1}}, \dots, \overrightarrow{e_n}\rangle$

$\dfrac{(A\vec{x})\cdot\vec{x}}{\vec{x}\cdot\vec{x}} = \lambda_n \Leftrightarrow \vec{x} \ne \vec{0}$ 且 $(A\vec{x})\cdot\vec{x} - \lambda_n(\vec{x}\cdot\vec{x}) = 0$

$\Leftrightarrow \vec{x} \ne \vec{0}$ 且 $\sum\limits_{i=1}^{n}(\lambda_i - \lambda_n)\,x_i^2 = 0$

$\Leftrightarrow \vec{x} \ne \vec{0}$且$\sum\limits_{i=1}^{s}(\lambda_i - \lambda_n)x_i^2 = 0$

$\Leftrightarrow \vec{x} \ne \vec{0}$ 且 $x_1 = \cdots = x_s = 0 \Leftrightarrow \vec{x} \in V^{\lambda_n} \setminus \{\vec{0}\}$

$\therefore \lambda_{max} = \max\limits_{\vec{x}\ne\vec{0}}\dfrac{(A\vec{x})\cdot\vec{x}}{\vec{x}\cdot\vec{x}} = \max\limits_{|\vec{x}|=1}\big((A\vec{x})\cdot\vec{x}\big)$

(ii)令$U = \langle\overrightarrow{e_1}, \dots, \overrightarrow{e_k}\rangle, \dim U = k$

由(i), $\max\limits_{\vec{x}\in U\setminus\{\vec{0}\}}\dfrac{(A\vec{x})\cdot\vec{x}}{\vec{x}\cdot\vec{x}} = \lambda_k$

于是 $\min\limits_{\dim U=k}\left(\max\limits_{\vec{x}\in U\backslash\{\vec{0}\}}\dfrac{(A\vec{x})\cdot\vec{x}}{\vec{x}\cdot\vec{x}}\right)\le\lambda_k\quad[*]$

另一方面, $\dim\langle\overrightarrow{e_k},\dots,\overrightarrow{e_n}\rangle=n-k+1$

$\dim(U\cap\langle\overrightarrow{e_k},\dots,\overrightarrow{e_n}\rangle)=\dim U+\dim\langle\overrightarrow{e_k},\dots,\overrightarrow{e_n}\rangle-\dim(U+\langle\overrightarrow{e_k},\dots,\overrightarrow{e_n}\rangle)$

$\ge k+n-k+1-n=1$

$\therefore\exists\vec{x}\ne\vec{0},\vec{x}\in U\cap\langle\overrightarrow{e_k},\dots,\overrightarrow{e_n}\rangle$ 使得 $\vec{x}\ne\vec{0}$ 且 $x_1=\cdots=x_{k-1}=0$

$\dfrac{(A\vec{x})\cdot\vec{x}}{\vec{x}\cdot\vec{x}}=\dfrac{\lambda_k x_k^2+\cdots+\lambda_n x_n^2}{x_k^2+\cdots+x_n^2}\ge\lambda_k$

则 $\max\limits_{\vec{x}\in U\backslash\{\vec{0}\}}\dfrac{(A\vec{x})\cdot\vec{x}}{\vec{x}\cdot\vec{x}}\ge\lambda_k$

则 $\min\limits_{\dim U=k}\left(\max\limits_{\vec{x}\in U\backslash\{\vec{0}\}}\dfrac{(A\vec{x})\cdot\vec{x}}{\vec{x}\cdot\vec{x}}\right)\ge\lambda_k\quad[**]$

由[*], [**], 结论成立 ■

【19-4】奇异值分解

$A\in\mathbb{R}^{m\times n}$. 则$\exists V_1\in O_m(\mathbb{R}),V_2\in O_n(\mathbb{R})$,

$D=\operatorname{diag}(\sigma_1,\dots,\sigma_n,0,\dots,0)\,,\sigma_i>0$

使得$A=V_1DV_2,\sigma_1,\dots,\sigma_n$称为矩阵$A$的奇异值

证: $a)$若A为可逆方阵, 则由第三章定理 6.3

$\exists$矩阵P,O使得$A=PO$, 使得P正定, O正交

对P来说, $\exists Q$正交, D对角, 使得$P=QDQ^{-1}$

则$A=QDQ^{-1}O$, 令$Q=V_1,Q^{-1}O=V_2$即可

$b)$一般情况: A^tA是实对称, 半正定矩阵

则$\exists P\in O_n(\mathbb{R})$使得$P^tA^tAP=\begin{pmatrix}D_1 & O\\ O & O\end{pmatrix}$

且$D_1=\operatorname{diag}(\lambda_1,\dots,\lambda_r)\,,\lambda_i>0,r=\operatorname{rank}A^tA=\operatorname{rank}A$

对P作分块, $P=(P_1,P_2),P_1\in\mathbb{R}^{n\times r},P_2\in\mathbb{R}^{n\times(n-r)}$

则$P^tA^tAP=\begin{pmatrix}P_1^tA^tAP_1 & P_1^tA^tAP_2\\ P_2^tA^tAP_1 & P_2^tA^tAP_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}D_1 & O\\ O & O\end{pmatrix}$

$\Rightarrow P_2^tA^tAP_2=(AP_2)^tAP_2=O,\qquad$ 取迹即得$AP_2=O$

则$AP=(AP_1,AP_2)=(AP_1,O)$

令$B\coloneqq AP$, 对B^t重复上述操作

同理$\exists Q^t=(Q_1^t,Q_2^t)\in O_m(\mathbb{R})$

使得$B^tQ_2=O$ 从而$B^tQ^t=(B^tQ_1^t,O)$

$QB=QAP=\begin{pmatrix}Q_1B\\ O\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A_1 & O\\ O & O\end{pmatrix}$

此时$\operatorname{rank}A_1=\operatorname{rank}(QAP)=\operatorname{rank}A=r$

$\Rightarrow A_1$为可逆方阵

$\because P,Q$正交 $\therefore$ 由$a)$, 结论成立

$A^tA=V_2^tD^2V_2\quad\sigma_i^2$刚好是$A^tA$的特征值 ■

部分特殊符号说明

【集合】

$\mathbb{R} \Rrightarrow$ 实数域

$\mathbb{C} \Rrightarrow$ 复数域

$\mathbb{Q} \Rrightarrow$ 有理数域

$\mathbb{Z} \Rrightarrow$ 正整数域

$\mathbb{N} \Rrightarrow$ 自然数域

$\{x|P(x)\}$满足条件$P(x)$的x组成的集合

$\mathrm{Func}(S,F) \Rrightarrow$ 从S到F的映射集合

$\mathrm{Map}(S,W) \Rrightarrow$ 从S到W的映射集合

$\mathrm{Hom}(V,W) \Rrightarrow$ 从V到W的线性映射集合

$\mathcal{L}(V) \Rrightarrow$ V到V的线性算子的集合

$F_n[x] \Rrightarrow$ 关于x的次数小于n的多项式集合

$\mathcal{L}_2(V,F) \Rrightarrow$ V 上双线性型集合

$\mathcal{L}_2^+(V,F) \Rrightarrow$ V 上对称双线性型集合

$\mathcal{L}_2^-(V,F) \Rrightarrow$ V 上斜对称双线性型集合

$M_n(F) \Rrightarrow$ 域F上的n阶方阵

$GL_n(F) \Rrightarrow$ 域F上的n阶可逆方阵

$F^{m\times n} \Rrightarrow$ n行m列矩阵集合

$O_n(\mathbb{R}) \Rrightarrow$ n阶正交矩阵集合

$\mathrm{card}\, S \Rrightarrow$ 集合S的基数,对有限集而言为元素个数

$\mathrm{char}\, F \Rrightarrow$ 域F的特征

【空间】

$\langle \overrightarrow{v_1}, \dots, \overrightarrow{v_n} \rangle$ ⇛ 由向量$\overrightarrow{v_1}, \dots, \overrightarrow{v_n}$生成的空间

$\mathbb{R}^n$ ⇛ n维实空间

F^n ⇛ n维坐标空间

V^* ⇛ V的对偶空间

U° ⇛ U的零化子空间

$\mathcal{A}(U)$ ⇛ 定义域为U的线性算子$\mathcal{A}$的像空间

V^λ ⇛ 特征值为λ的特征子空间

$F[\mathcal{A}] \cdot \vec{v}$ ⇛ 由$\mathcal{A}$和$\vec{v}$生成的循环子空间

$V(p_i)$ ⇛ 关于因子p_i的广义特征子空间

$\dim V$ ⇛ 空间V的维数

$U \oplus V$ ⇛ 空间U, V的直和

$U + V$ ⇛ 空间U, V的和

$U \cap V$ ⇛ 空间U, V的交

$V/_U$ ⇛ V关于子空间U的商空间

$U^\perp$ ⇛ U的正交补空间

【向量】

$\vec{v}^t$ ⇛ 向量$\vec{v}$的转置

$\overrightarrow{0_V}$ ⇛ 线性空间V中的零向量

$\overrightarrow{A^{(j)}}$ ⇛ 矩阵A的第j列列向量

$|\vec{x}|, \left\|\vec{x}\right\|$ ⇛ 向量$\vec{x}$的长度或范数

$\vec{x} \cdot \vec{y}$ ⇛ 向量$\vec{x}$与$\vec{y}$的内积

【矩阵】

$O_{m\times n}$ ⇛ m行n列的零矩阵

$\mathrm{diag}(A_1,\dots,A_n,\lambda_1,\dots,\lambda_n)$

⇛ 由方阵$A_1,\dots,A_n$,数$\lambda_1,\dots,\lambda_n$组成的对角矩阵

A^t ⇛ 矩阵A的转置

$|A|,\det A$ ⇛ 方阵A的行列式

$\mathrm{rank}\,A$ ⇛ 矩阵A的秩

$\mathrm{tr}\,A$ ⇛ 矩阵的迹

$\triangle_k(A)$ ⇛ A的第k个顺序主子式

$\mathrm{spec}_F\,A$ ⇛ 矩阵A在F上的谱

$f(A)$ ⇛ 多项式作用在矩阵A上

J_A ⇛ 矩阵A的$Jordan$标准型

$J_n(\lambda)$ ⇛ 主对角元是λ的n阶约当块

$G(\overrightarrow{v_1},\dots,\overrightarrow{v_n})$ ⇛ 向量$\overrightarrow{v_1},\dots,\overrightarrow{v_n}$的$Gram$矩阵

$\bar{A}$ ⇛ 矩阵A的共轭

【映射】

Id,id ⇛ 恒等映射

$\mathcal{O}$ ⇛ 零算子

$\mathcal{E}$ ⇛ 恒同算子

$\bar{\mathcal{A}}$ ⇛ 商算子

$\ker\varphi$ ⇛ 线性映射的核

$\mathrm{im}\,\varphi$ ⇛ 线性映射的像

$\varphi\big|_U$ ⇛ 映射φ的定义域限制在U上

$\varphi\circ\psi$ ⇛ 复合映射

$\operatorname{rank} f$ ⇛ 线性映射f的秩

$f(\mathcal{A})$ ⇛ 多项式作用在线性算子$\mathcal{A}$上

【多项式】

$\deg f$ ⇛ 多项式f的次数

μ_A ⇛ 矩阵A的极小多项式

$\mu_{\mathcal{A}}$ ⇛ 算子$\mathcal{A}$的极小多项式

$\mu_{\mathcal{A},\vec{v}}$ ⇛ 关于$\mathcal{A}$和$\vec{v}$的极小多项式

$\mathcal{X}_A$ ⇛ 矩阵A的特征多项式

$\mathcal{X}_{\mathcal{A}}$ ⇛ 算子$\mathcal{A}$的特征多项式

$f \mid g$ ⇛ f整除g

$\operatorname{lcm}(q_1, q_2)$ ⇛ 多项式q_1, q_2的最小公倍式

$\gcd(q_1, q_2)$ ⇛ 多项式q_1, q_2的最大公因式

【关系】

$\sim$ ⇛ 等价关系

$\sim_e$ ⇛ 初等相似

$\sim_c$ ⇛ 合同

$\sim_s$ ⇛ 相似

$\sim_o$ ⇛ 正交相似

$\sim_u$ ⇛ 酉相似

$V \simeq W$ ⇛ V和W线性同构

$P \Rightarrow Q$ ⇛ 命题P能推出命题Q

$P \Leftrightarrow Q$ ⇛ 命题P与Q等价

$F \coloneqq G$ $\Rrightarrow$ 定义F,F表示G

$<\infty$ $\Rrightarrow$ 有穷

$\exists!$ $\Rrightarrow$ 存在唯一的

$\perp \Rrightarrow$ 向量或空间垂直

【其他】

$\bar{a}$ $\Rrightarrow$ 复数a的共轭

δ_{ij} $\Rrightarrow$ $kronecker$函数,当$i = j$时取值为 1,否则为 0

$* \Rrightarrow$ 用于标记公式或表示不知道也无需关心的量